Információelmélet zárthelyi

2010. október 22.

Fontos! Minden megoldáshoz részletes indoklást kérünk. Minden előadáson elhangzott, vagy a jegyzetben megtalálható állítás felhasználható megfelelő hivatkozással.

---

1. feladat. Legyen X egy diszkrét, valós értékű valószínűségi változó. Hogyan viszonyul egymáshoz $H(X)$ és $H(Y)$, ha (a) $Y = 2^X$? (b) $Y = \cos X$?

2. feladat. Legyen Z_1 és Z_2 bináris a következő együttes eloszlással:
$\mathbf{P}\{Z_1 = 0, Z_2 = 0\} = \frac{1}{3}, \mathbf{P}\{Z_1 = 1, Z_2 = 0\} = \frac{1}{3}, \mathbf{P}\{Z_1 = 0, Z_2 = 1\} = 0, \mathbf{P}\{Z_1 = 1, Z_2 = 1\} = \frac{1}{3}$
Határozd meg $H(Z_1), H(Z_2), H(Z_1|Z_2), H(Z_2|Z_1)$ és $H(Z_1, Z_2)$ értékét!

3. feladat. Add meg a forrásentrópia definícióját! Stacionárius forrás esetén hogyan számolható ki?

4. feladat. Tekintsük az alábbi átmenetvalószínűségekkel adott $\mathbf{Z} = Z_1, Z_2, \ldots$ Markov-láncot.

$$\mathbf{P}\{Z_2 = 0|Z_1 = 0\} = \frac{1}{2},\ \mathbf{P}\{Z_2 = 1|Z_1 = 0\} = \frac{1}{4},\ \mathbf{P}\{Z_2 = 2|Z_1 = 0\} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{P}\{Z_2 = 0|Z_1 = 1\} = \frac{1}{4},\ \mathbf{P}\{Z_2 = 1|Z_1 = 1\} = \frac{1}{2},\ \mathbf{P}\{Z_2 = 2|Z_1 = 1\} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{P}\{Z_2 = 0|Z_1 = 2\} = \frac{1}{4},\ \mathbf{P}\{Z_2 = 1|Z_1 = 2\} = \frac{1}{4},\ \mathbf{P}\{Z_2 = 2|Z_1 = 2\} = \frac{1}{2}.$$

Tegyük fel, hogy a láncot a stacionárius eloszlásból indítjuk. Legyen továbbá $Y_1, Y_2, \ldots$ független, azonos eloszlású bináris valószínűségi változók sorozata, ahol $P(Y_i = 0) = \frac{1}{3}$. Definiáljuk az $\mathbf{X} = X_1, X_2, \ldots$ forrást az $X_i = 3Z_i + 2Y_i$ egyenlettel. Mennyi az $\mathbf{X}$ forrás entrópiája feltéve, hogy $Z_1, Z_2, \ldots$ független $Y_1, Y_2, \ldots$-től?

5. feladat. Legyen a forrásábécé $\mathcal{X} = \{a, b, c\}$ és a szótár kezdetben tartalmazza az a, b és c betűket a kódszavaikkal ($1, 2$ és 3). A Lempel–Ziv–Welch-algoritmust használva,
(a) kódold a **cabcbcbcb** sorozatot,
(b) dekódold a $\mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{1}$ sorozatot.