Inform?ci?elm?let z?rthelyi

2009. okt?ber 29.

A megold?sokhoz r?szletes indokl?st k?r?nk. Minden el?ad?son elhangzott vagy a jegyzetben megtal?lhat? ?ll?t?s felhaszn?lhat? megfelel? hivatkoz?ssal.

---

1. feladat. Legyen $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$?s $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ k?t val?sz?n?s?geloszl?s, ?s defini?ljuk a k?t eloszl?s k?z?tti „inform?ci?s t?vols?got” a

$$D(\mathbf{p}|\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{p_i}{q_i}$$

kifejez?ssel. L?ssuk be a k?vetkez? tulajdons?gokat:

- B?rmely k?t eloszl?sra , $D(\mathbf{p}|\mathbf{q})$?s egyenl?s?g pontosan akkor teljes?l, ha $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.
- $H(\mathbf{p}) = \log n - D(\mathbf{p}|\mathbf{u})$, ahol $H(\mathbf{p})$ jel?li a $\mathbf{p}$ eloszl?s entr?pi?j?t, $\mathbf{u}$ pedig az egyenletes eloszl?st az $\{1, \dots, n\}$ halmazon.

2. feladat. Legyenek X ?s Z bin?ris (0-1 ?rt?k?) f?ggetlen val?sz?n?s?gi v?ltoz?k, ?gy, hogy $\mathbf{P}\{X = 1\} = p$?s $\mathbf{P}\{Z = 1\} = \frac{1}{2}$. Legyen $Y = X \oplus Z$, ahol $\oplus$ modulo 2 ?sszead?st jel?l. X felfoghat?, mint titkos?tand? ?zenet, Z a titkos kulcs, ?s Y a rejtjelezett ?zenet. Sz?molja ki a k?vetkez? mennyis?geket ?s magyar?zza meg jelent?s?ket a titkos?t?s szempontj?b?l: $H(X), H(X|Z), H(X|Y), H(X|Y,Z)$.

3. feladat. Legyen $\mathbb{X} = X_1, X_2, \dots$ egy bin?ris, eml?kezetn?lk?li stacion?rius forr?s, amelyre $\mathbf{P}\{X_1 = 1\} = 10^{-6}$. Adjuk meg az $\mathbb{X}$ egy olyan v?ltoz? sz?hossz?s?g? blokk-k?dj?t, melynek bet?nk?nti ?tlagos k?dsz?hossza kisebb, mint $\frac{1}{10}$.

4. feladat. Legyenek $X_1, \dots, X_n$ bin?ris val?sz?n?s?gi v?ltoz?k. Jel?lje $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots)$ az egyes szimb?lumok el?fordul?sainak futamhosszait. Teh?t p?ld?ul az 1110010001111 sorozathoz az $\mathbf{R} = (3, 2, 1, 3, 4)$ tartozik. Hogyan viszonyul egym?shoz $H(X_1, \dots, X_n)$, $H(\mathbf{R})$?s $H(\mathbf{R}, X_n)$?

5. feladat. Legyen a $[0, 1]$ intervallumon ?rtelmezett h f?ggv?ny (bin?ris entr?piaf?ggv?ny) ?rt?ke

$$h(x) = -x \log x - (1 - x) \log(1 - x)$$

ha $x \in (0, 1)$, ?s $h(0) = h(1) = 0$. Mutassuk meg, hogy h rendelkezik a k?vetkez? tulajdons?gokkal:

- szimmetrikus az $\frac{1}{2}$ pontra;
- $[0, 1]$ minden pontj?ban folytonos;
- $[0, \frac{1}{2}]$-ben szigor?an monoton n?vekv?;
- szigor?an konk?v.