Információelmélet—ZH 2003. április 8.

Fontos! Minden megoldáshoz részletes indoklást kérünk. Minden előadáson elhangzott, vagy a jegyzetben megtalálható állítás felhasználható megfelelő hivatkozással.

Feladat 1 *Egy szabályos pénzérmét addig dobunk fel, amíg nem kapunk két fejet vagy két írást. Legyen* X_1 *és* X_2 *az első két dobás eredménye,* Y *pedig az utolsó (második vagy harmadik) dobás eredménye, és legyen* N *a dobások száma. Számold ki a következő mennyiségeket:* $H(X_1)$, $H(X_2)$, $H(Y)$, $H(N)$, $I(X_1, Y)$, $I(X_2, Y)$, $I(X_1, X_2; Y)$, $I(Y, N)$, $I(X_1, N)$, $I(X_2, N)$, $I(X_1, X_2; N)$.

Feladat 2 *Legyenek* $X_1, \ldots, X_n$ *bináris valószínűségi változók. Jelölje* $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots)$ *az egyes szimbólumok előfordulásainak futamhosszait. Tehát például az* 1110010001111 *sorozathoz* $\mathbf{R} = (3, 2, 1, 3, 4)$ *tartozik. Hogyan viszonyul egymáshoz* $H(X_1, \ldots, X_n), H(\mathbf{R})$ *és* $H(\mathbf{R}, X_n)$*?*

Feladat 3 *Legyen a forrásábécé* $\mathcal{X} = \{A, B, Z, Y\}$*. Az órán tanult* **adaptív** *Huffman-algoritmus használatával adj meg egy bináris kódját a BABY szónak! Minden lépésben add meg a Huffman-fát a súlyokkal!*

Feladat 4 *Tekintsük az alábbi átmenetvalószínűségekkel adott* $\mathbf{Z} = Z_1, Z_2, \ldots$ *Markov-láncot.*

$$\mathbf{P}\{Z_2 = 0|Z_1 = 0\} = \frac{1}{2},\ \mathbf{P}\{Z_2 = 1|Z_1 = 0\} = \frac{1}{4},\ \mathbf{P}\{Z_2 = 2|Z_1 = 0\} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{P}\{Z_2 = 0|Z_1 = 1\} = \frac{1}{4},\ \mathbf{P}\{Z_2 = 1|Z_1 = 1\} = \frac{1}{2},\ \mathbf{P}\{Z_2 = 2|Z_1 = 1\} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{P}\{Z_2 = 0|Z_1 = 2\} = \frac{1}{4},\ \mathbf{P}\{Z_2 = 1|Z_1 = 2\} = \frac{1}{4},\ \mathbf{P}\{Z_2 = 2|Z_1 = 2\} = \frac{1}{2}.$$

Tegyük fel, hogy a láncot a stacionárius eloszlásból indítjuk. Legyen továbbá $Y_1, Y_2, \ldots$ *független, azonos eloszlású bináris valószínűségi változók sorozata, ahol* $P(Y_i = 0) = \frac{1}{3}$*. Definiáljuk az* $\mathbf{X} = X_1, X_2, \ldots$ *forrást az* $X_i = 3Z_i + 2Y_i$ *egyenlettel. Mennyi az* $\mathbf{X}$ *forrás entrópiája feltéve, hogy* $Z_1, Z_2, \ldots$ *független* $Y_1, Y_2, \ldots$*-től?*

Feladat 5 *Az ábrán látható* $f(x)$ *sűrűségfüggvényű* X *valószínűségi változót 2 bites egyenletes kvantálóval kvantáljuk, mely illeszkedik a* $[-4, 4]$ *intervallumra.*
(a) Számold ki a kvantáló pontos és becsült négyzetes torzítását!
(b) Mennyi a kvantáló entrópiája?