Információelmélet—ZH 2000. április 17.

Fontos! Minden megoldáshoz részletes indoklást kérünk. Minden előadáson elhangzott, vagy a jegyzetben megtalálható állítás felhasználható megfelelő hivatkozással.

Feladat 1 *Az alábbi marginális eloszlású $p(x, y)$ eloszlások közül melyiknek maximális az entrópiája?*

	x_1	x_2	x_3	
y_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	1/2
y_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	1/4
y_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	1/4
	2/3	1/6	1/6	

Határozd meg $H(X, Y)$-t erre az eloszlásra.

Feladat 2 *Egy kísérlet eredménye egy hét lehetséges értéket felvevő valószínűségi változó, melynek eloszlása $(1/3, 1/3, 1/9, 1/9, 1/27, 1/27, 1/27)$. A kísérlet kimenetelét telefonon szeretnénk továbbítani. A telefontársaság kétféle szolgáltatást nyújt: az üzenetet vagy bináris formában, bitenként 200 Ft-ért továbbítja, vagy ternáris formában 325 Ft per ternáris szimbólum tarifával. Melyik szolgáltatást válasszuk, és milyen kódot alkalmazzunk, hogy átlagos értelemben a legolcsóbban jöjjünk ki? Melyik szolgáltatást válasszuk akkor, ha a kísérletet nagyon sokszor, függetlenül ismétlik meg, és az eredményt együttesen kódolhatjuk? ($\log 3 \approx 1.585$)*

Feladat 3 *Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó. ($f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$). Egyenletesen kvantálva X-et, a kvantáló kimenetének entrópiája 16 bit. Megközelítőleg határozd meg a jel/kvantálási zaj viszonyt dB-ben. ($10 \log_{10} \frac{\mathbf{E}X^2}{D(Q)}$).*

Feladat 4 *Legyen $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ stacionárius forrás $H(\mathbf{X})$ entrópiával. Állapítsd meg, hogy létezik-e, és ha igen, akkor mennyi a következő források entrópiája:*

- $\mathbf{X}_a = (X_1, X_1, X_2, X_2, X_3, X_3, \ldots)$ *(minden valószínűségi változót egyszer megismétlünk)*
- $\mathbf{X}_b = (X_1, X_1, X_2, X_3, X_3, X_4, X_5, X_5, X_6, \ldots)$ *(csak a páratlan sorszámú valószínűségi változókat ismételjük meg)*
- $\mathbf{X}_c = (X_1, X_2, X_2, X_3, X_3, X_3, X_4, X_4, X_4, X_4, \ldots)$ *(az i-edik valószínűségi változót i-szer ismételjük meg)*

Feladat 5 *Legyenek X és Z független bináris valószínűségi változók, $\mathbf{P}(X = 0) = 1/2$ és $\mathbf{P}(Z = 0) = p$ valószínűségekkel, és legyen $Y = X + Z$. Milyen p-re lesz az $I(X, Y)$ kölcsönös információ minimális azon feltétel mellett, hogy az X és Y közti Hamming-torzítás legfeljebb δ, ahol $\delta < 1/2$?*