# Információelmélet—ZH 2000. április 17.

## Megoldások

**Feladat 1** *Az alábbi marginális eloszlású $p(x,y)$ eloszlások közül melyiknek maximális az entrópiája?*

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $p_{13}$ | 1/2 |
| $y_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $p_{23}$ | 1/4 |
| $y_3$ | $p_{31}$ | $p_{32}$ | $p_{33}$ | 1/4 |
| | 2/3 | 1/6 | 1/6 | |

*Határozd meg $H(X,Y)$-t erre az eloszlásra.*

**Megoldás:** Tanultuk, hogy $H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $X$ és $Y$ függetlenek. Ekkor az együttes eloszlás: $p_{ij} = p(x_i) \cdot p(y_j)$. $H(X,Y) = H(X) + H(Y) = (-\frac{1}{2}log\frac{1}{2} - \frac{1}{4}log\frac{1}{4} - \frac{1}{4}log\frac{1}{4}) + (-\frac{2}{3}log\frac{2}{3} - \frac{1}{6}log\frac{1}{6} - \frac{1}{6}log\frac{1}{6}) = \frac{3}{2} + (log3 - \frac{1}{3}) \approx 2.7516$ bit.

**Feladat 2** *Egy kísérlet eredménye egy hét lehetséges értéket felvevő valószínűségi változó, melynek eloszlása $(1/3, 1/3, 1/9, 1/9, 1/27, 1/27, 1/27)$. A kísérlet kimenetelét telefonon szeretnénk továbbítani. A telefontársaság kétféle szolgáltatást nyújt: az üzenetet vagy bináris formában, bitenként 200 Ft-ért továbbítja, vagy ternáris formában 325 Ft per ternáris szimbólum tarifával. Melyik szolgáltatást válasszuk, és milyen kódot alkalmazzunk, hogy átlagos értelemben a legolcsóbban jöjjünk ki? Melyik szolgáltatást válasszuk akkor, ha a kísérletet nagyon sokszor, függetlenül ismétlik meg, és az eredményt együttesen kódolhatjuk? ($\log 3 \approx 1.585$)*

**Megoldás:** Optimális ternáris Huffman-kód a következő: $(0, 1, 20, 21, 220, 221, 222)$. Ennek átlagos kódszóhossza $= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{9} \cdot 2 + \frac{1}{9} \cdot 2 + \frac{1}{27} \cdot 3 + \frac{1}{27} \cdot 3 + \frac{1}{27} \cdot 3 = \frac{13}{9}$, tehát az átlagos költség ternáris esetben $325 \cdot \frac{13}{9} \approx 469$ Ft. Elkészítve a bináris Huffman-kódot, pl. $(00, 01, , 100, 101, 110, 1110, 1111)$, az átlagos kódszóhossz $= \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{9} \cdot 3 + \frac{1}{9} \cdot 3 + \frac{1}{27} \cdot 4 + \frac{1}{27} \cdot 5 + \frac{1}{27} \cdot 5 = \frac{65}{27}$, tehát az átlagos költség $200 \cdot \frac{65}{27} \approx 480$ Ft, ami rosszabb, mint a ternáris esetben.

Ha hosszú blokkokat kódolhatunk, akkor a betűnkénti átlagos kódszóhosszal $\frac{H(X)}{logs}$ tetszőleges közelségébe kerülhetünk, ahol $s$ a kódábécé elemszáma. A költség tehát bináris esetben kísérletenként $200 \cdot H(X)$, míg ternáris esetben $325 \cdot \frac{H(X)}{log3} \approx 205.047 \cdot H(X) > 200 \cdot H(X)$. Ilyenkor már a bináris kód az olcsóbb.

**Feladat 3** *Legyen $X$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó. ($f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$). Egyenletesen kvantálva $X$-et, a kvantáló kimenetének entrópiája 16 bit. Megközelítőleg határozd meg a jel/kvantálási zaj viszonyt dB-ben. ($10 \log_{10} \frac{\mathbf{E}X^2}{D(Q)}$).*

**Megoldás:** Tanultuk az alábbi közelítéseket a torzításra, illetve az entrópiára: $D(Q) \approx \frac{q_N^2}{12}$, $H(Q) \approx -logq_N + H(f)$, ahol $H(f)$ az $f$ eloszlás differenciális entrópiája. Ebből $H(Q) \approx H(f) - log\sqrt{12D(Q)}$, azaz $D(Q) \approx \frac{1}{12}2^{2(H(f)-H(Q))}$. A feladat szerint $H(Q) = 16$. Házi feladat volt $H(f)$ kiszámolása exponenciális eloszlásra: $H(f) = log\frac{e}{\lambda}$.

$$(H(f) = -\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} log\left(\lambda e^{-\lambda x}\right) dx = -\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\left(log\lambda - \lambda x loge\right) dx =$$
$$= -log\lambda \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx + \lambda loge \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = -log\lambda + \lambda loge\frac{1}{\lambda} = log\frac{e}{\lambda})$$

$\mathbf{E}X^2 = \frac{2}{\lambda^2}$. Innen a jel/zaj viszony behelyettesítéssel adódik.

**Feladat 4** *Legyen* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ *stacionárius forrás* $H(\mathbf{X})$ *entrópiával. Állapítsd meg, hogy létezik-e, és ha igen, akkor mennyi a következő források entrópiája:*

- $\mathbf{X}_a = (X_1, X_1, X_2, X_2, X_3, X_3, \ldots)$ *(minden valószínűségi változót egyszer megismétlünk)*
- $\mathbf{X}_b = (X_1, X_1, X_2, X_3, X_3, X_4, X_5, X_5, X_6, \ldots)$ *(csak a páratlan sorszámú valószínűségi változókat ismételjük meg)*
- $\mathbf{X}_c = (X_1, X_2, X_2, X_3, X_3, X_3, X_4, X_4, X_4, X_4, \ldots)$ *(az $i$-edik valószínűségi változót $i$-szer ismételjük meg)*

**Megoldás:** Forrás entrópiájának definíciója: $H(\mathbf{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
a) Mivel minden valószínűségi változót egyszer megismétlünk, az első $2n$ valószínűségi változó együttes entrópiája ebben az esetben megegyezik az eredeti forrás első $n$ valószínűségi változójának együttes entrópiájával (hiszen $H(Y,Y) = H(Y)$ minden $Y$ valószínűségi változóra), azaz
$H(X_1, X_1, X_2, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_{n-1}, X_n, X_n) = H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, ugyanakkor nyilván az is igaz, hogy $H(X_1, X_1, X_2, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_{n-1}, X_n) = H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Így
$H(\mathbf{X}_a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} H(X_1, X_1, X_2, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_{n-1}, X_n, X_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} H(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X_n) = \frac{1}{2} H(\mathbf{X})$.
b) Teljesen hasonlóan adódik, hogy
$H(\mathbf{X}_b) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{3}{2}n} H(X_1, X_1, X_2, \ldots, X_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\frac{1}{n} H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{2}{3} H(\mathbf{X})$.
c) Ebben az esetben az első $\frac{n(n+1)}{2}$ valószínűségi változó együttes entrópiája fog megegyezni az eredeti forrás első $n$ valószínűségi változójának együttes entrópiájával, ezért
$H(\mathbf{X}_c) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} H(X_1, X_2, X_2, \ldots, X_n, X_n, \ldots, X_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1}\frac{1}{n} H(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$.

**Feladat 5** *Legyenek $X$ és $Z$ független bináris valószínűségi változók, $\mathbf{P}(X = 0) = 1/2$ és $\mathbf{P}(Z = 0) = p$ valószínűségekkel, és legyen $Y = X + Z$. Milyen $p$-re lesz az $I(X,Y)$ kölcsönös információ minimális azon feltétel mellett, hogy az $X$ és $Y$ közti Hamming-torzítás legfeljebb $\delta$, ahol $\delta < 1/2$?*

**Megoldás:** A kölcsönös információra tanultuk, hogy $I(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$. Mivel $X$ bináris $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ eloszással, ezért az entrópiája $H(X) = h(\frac{1}{2}) = 1$. Tehát $I(X,Y)$ akkor minimális, ha $H(X|Y)$ maximális. $Y = X + Z$ három értéket vehet fel: 0, 1 vagy 2 lehet. $H(X|Y) = \mathbf{P}(Y = 0) \cdot H(X|Y = 0) + \mathbf{P}(Y = 1) \cdot H(X|Y = 1) + \mathbf{P}(Y = 2) \cdot H(X|Y = 2)$. Nézzük a feltételes entrópiákat. Ha $Y = 0$, akkor $Y = X + Z$ miatt $X$ egy valószínűséggel 0, tehát az entrópiája $H(X|Y = 0) = 0$. Hasonlóan, ha $Y = 2$, akkor $X = 1$ egy valószínűséggel, ezért $H(X|Y = 2) = 0$.
$H(X|Y = 1) = -\mathbf{P}(X = 0|Y = 1) log \mathbf{P}(X = 0|Y = 1) - \mathbf{P}(X = 1|Y = 1) log \mathbf{P}(X = 1|Y = 1)$.
Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{P}(X = 0|Y = 1) = \mathbf{P}(Z = 1)$ és $\mathbf{P}(X = 1|Y = 1) = \mathbf{P}(Z = 0)$, így $H(X|Y = 1) = H(Z) = h(p) = h(1-p)$.
Kell még a $\mathbf{P}(Y = 1)$ valószínűség: $\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Z = 0) + \mathbf{P}(X = 0)\mathbf{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2}$. Tehát $H(X|Y) = \frac{1}{2}h(p)$, ennek a maximumát keressük feltéve, hogy a Hamming-torzítás legfeljebb $\delta$, azaz $\mathbf{P}(X \neq Y) = \mathbf{P}(Z = 1) = 1 - p \leq \delta$. A bináris entrópiafüggvény monoton nő a $(0, \frac{1}{2})$ intervallumban, ezért $h(1-p) \leq h(\delta)$ és akkor maximális, ha $1 - p = \delta$. Tehát a keresett érték $p = 1 - \delta$.