Néhány végeredmény

Az információelmélet példatár feladataihoz

4. feladat (Rossz kódok) A következő bináris kódok melyike nem lehet semmilyen eloszlás Huffmann kódja? Mindegyik válaszod indokold meg, azaz ha nincs ilyen eloszlás, akkor magyarázd meg, miért, ha pedig van, akkor adj meg egy olyat!

(a) 0, 10, 111, 101 nem lehet

(b) 00, 010, 011, 10, 110 nem lehet

(c) 1, 000, 001, 010, 011 lehet, pl $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$

5. feladat

Legyen az $\mathcal{X}$ forrásábécé ötelemű, a következő valószínűségekkel: $0.4; 0.35; 0.1; 0.1; 0.05$. Mennyi az eloszlás entrópiája? Konstruáld meg az előző feladatban szereplő bináris Shannon-Fano kódot, illetve konstruálj bináris prefix kódot az $l_i = \lceil -\log p(x_i) \rceil$ kódhosszúságokkal az órán bemutatott módon (a kód bináris fával való reprezentálásával). Mennyi az átlagos kódszóhossz?

$H(X) = 1.94$, $\mathbf{E}|f(X)| = 2.55$

7. feladat

Egy kétforintost addig dobunk fel, amíg írást nem kapunk. Jelölje az X valószínűségi változó a dobások számát. Mennyi az X entrópiája?

$H(X) = 2$

14. feladat

Egy X valószínűségi változó eloszlásából egymástól függetlenül sorsolt szimbólumokat betűnként optimálisan (Huffmann kóddal) kódolták. Egy hat hosszúságú üzenet kódolásának eredménye az 10110000101 string. Azt tudjuk, hogy a forrásábécé öt elemű, a forrás eloszlásáról azonban csak az ismert, hogy az egyes szimbólumok valószínűségeit a $\{0,4; 0,3; 0,2; 0,05; 0,05\}$, és $\{0,3; 0,25; 0,2; 0,2; 0,05\}$ eloszlások egyike adja meg. Állapítsuk meg a forrás eloszlását!

A forrás eloszlása: $\{0,4; 0,3; 0,2; 0,05; 0,05\}$

15. feladat (Titkosítás) Legyenek X és Z bináris (0-1 értékű) független valószínűségi változók. Eloszlásukat $\mathbf{P}\{X = 1\} = p$ és $\mathbf{P}\{Z = 1\} = 1/2$ adja meg. Legyen $Y = X \oplus Z$, ahol $\oplus$ modulo 2 összeadást jelöl. X felfogható, mint titkosítandó üzenet, Z a titkos kulcs, és Y a rejtjelezett üzenet. Számold ki a következő mennyiségeket: $H(X), H(X|Z), H(X|Y), H(X|Y,Z), I(X;Y), I(X;Z), I(X;(Y,Z))$. Értelmezd a kapott eredményeket, például azt, hogy mit jelent az $I(X;Y)$-ra kapott szám.

$H(X) = h(p) = H(X|Z) = H(X|Y) \quad H(X|Y,Z) = 0$
$I(X;Y) = 0 = I(X;Z) \quad I(X;(Y,Z)) = h(p)$

18. feladat (FUTAMHOSSZ KÓDOLÁS) Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ bináris valószínűségi változók. Jelölje $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots)$ az egyes szimbólumok előfordulásainak futamhosszait. Tehát például az 1110010001111 sorozathoz $\mathbf{R} = (3, 2, 1, 3, 4)$ tartozik. Hogyan viszonyul egymáshoz $H(X_1, \ldots, X_n), H(\mathbf{R})$ és $H(\mathbf{R}, X_n)$?

$H(X_1, \ldots, X_n) \geq H(\mathbf{R}) \qquad H(\mathbf{R}, X_n) = H(X_1, \ldots, X_n)$

19. feladat (MARKOV-LÁNC ENTRÓPIÁJA) Legyen $\mathbf{X} = X_1, X_2, \ldots$ egy bináris, stacionárius Markov lánc, amely állapotátmenetei a következők:

$$\mathbf{P}\{X_2 = 0 | X_1 = 0\} = p,\ \mathbf{P}\{X_2 = 1 | X_1 = 0\} = 1-p,\ \mathbf{P}\{X_2 = 0 | X_1 = 1\} = \frac{1-p}{2},\ \mathbf{P}\{X_2 = 1 | X_1 = 1\} = \frac{1+p}{2}.$$

Mennyi $\mathbf{P}\{X_1 = 0\}$? Mennyi a forrás entrópiája?

$\mathbf{P}\{X_1 = 0\} = \frac{1}{3} \qquad H(\mathbf{X}) = \frac{1}{3}h(p) + \frac{2}{3}h(\frac{1-p}{2})$

23. feladat

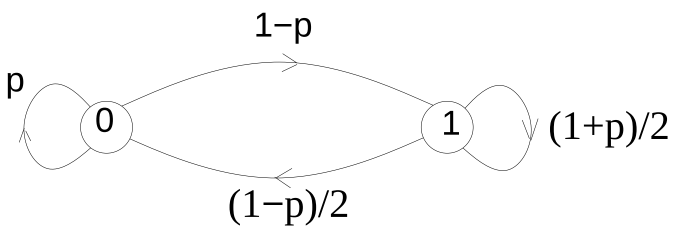
Legyenek a $\mathbf{Z}$ stacionárius Markov-lánc állapotai a $0, 1, \ldots, 255$ számok. Legyenek az állapotátmenet valószínűségek az alábbi 256×256-os mátrix-szal adottak. (A mátrix i-edik sorának j-edik oszlopában a $\mathbf{P}\{Z_2 = j | Z_1 = i\}$ valószínűség található.) Mi a Markov-lánc stacionárius eloszlása? Mennyi a forrás entrópiája? Készíts jó egyértelműen dekódolható, változó szóhosszúságú blokk-kódot!

$$\begin{bmatrix}
1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\
0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & \cdots & & & & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & & & & & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\
1/4 & 0 & 0 & \cdots & & & & & 0 & 1/2 & 1/4 \\
1/4 & 1/4 & 0 & \cdots & & & & & 0 & 0 & 1/2
\end{bmatrix}$$

$\mathbf{P}\{Z_1 = i\} = \frac{1}{256}$ minden i-re, $H(\mathbf{Z}) = \frac{3}{2}$

24. feladat

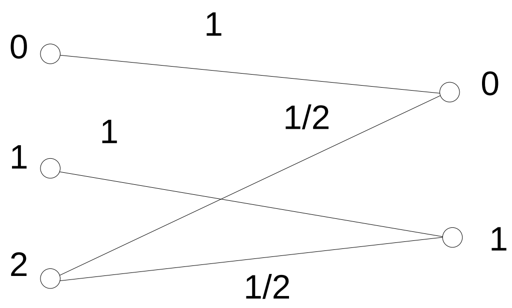
Az alábbi ábra egy $\mathbf{Z} = Z_1, Z_2, \ldots$ Markov-lánc működését írja le. Tegyük fel, hogy a láncot a stacionárius eloszlásból indítjuk.

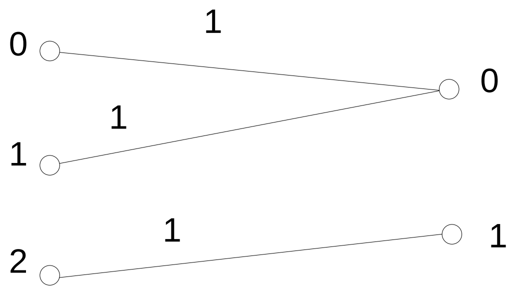


Legyen továbbá $Y_1, Y_2, \ldots$ független, azonos eloszlású bináris valószínűségi változók sorozata, ahol $P(Y_i = 0) = \frac{1}{3}$. Definiáljuk az $\mathbf{X} = X_1, X_2, \ldots$ forrást az $X_i = 2Z_i + Y_i$ egyenlettel. Mennyi az $\mathbf{X}$ forrás entrópiája feltéve, hogy $Z_1, Z_2, \ldots$ független $Y_1, Y_2, \ldots$-től?

$H(\mathbf{X}) = H(\mathbf{Z}) + H(X_1 | Z_1) = \frac{1}{3}h(p) + \frac{2}{3}h(\frac{1-p}{2}) + h(\frac{1}{3})$

27. feladat
Mennyi az ábrán látható két csatorna kapacitása?





Tegyük fel most, hogy a két csatornát egyszerre használjuk, azaz a bemeneti 0,1, vagy 2 szimbólumot mindkét csatornán továbbítjuk. Így egy olyan csatornához jutottunk, amelynek három lehetséges bemenete, és négy kimenete van. Mennyi az új csatorna kapacitása? Mutasd meg, hogy mindhárom csatorna esetén van olyan $R = C$ jelsebességű kód, amely nulla hibavalószínűséggel dekódolható.

Mindkét csatornára: $C = 1$. Ha egyszerre használjuk őket, akkor $C = \log 3 \approx 1.585$.

28. feladat (Mod 11 csatorna) Legyen egy diszkrét memóriamentes csatorna bemenete $U \in \{0, 1, \ldots, 10\}$. A csatorna kimenetét, V-t a $V = U + Z \pmod{11}$ egyenlet határozza meg, ahol Z független U-tól és

$$P\{Z = 1\} = P\{Z = 2\} = P\{Z = 3\} = \frac{1}{3}.$$

a, Határozd meg a csatorna kapacitását!

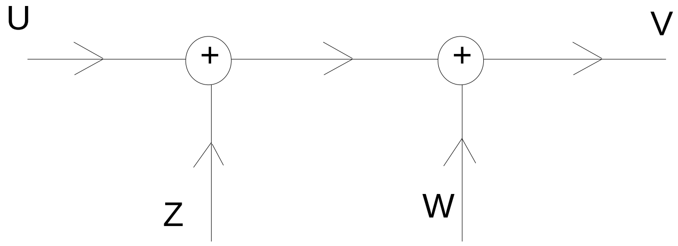
$C = \log 11 - \log 3 \approx 1.8744$

29. feladat
Az ábrán látható blokksémán U, Z és W független bináris valószínűségi változók , $\oplus$ pedig modulo 2 összeadást jelöl. Az elrendezés meghatároz egy bináris csatornát, melynek bemenete U, kimenete V.
(a) Mennyi a csatorna kapacitása, ha $\mathbf{P}\{Z = 1\} = p$ és $\mathbf{P}\{W = 1\} = q$?

$C = 1 - h\left(p(1-q) + (1-p)q\right)$

(b) Ha az első $\oplus$ műveletet kicseréljük bináris "vagy" műveletre, a másodikat bináris "és" műveletre, akkor $p = 1/3$ és $q = 3/4$ esetén mi a csatorna kapacitása?

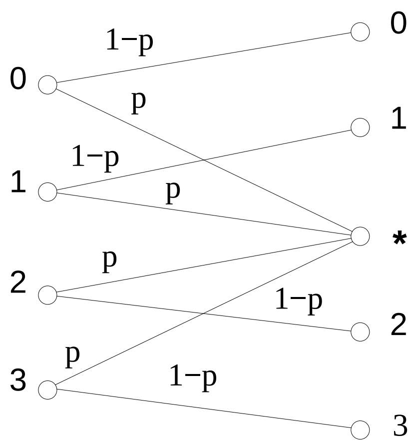
$C = 1 - h(\frac{1}{4})$



33. feladat

(a) Mennyi az ábrán látható csatorna kapacitása?

$C = 2(1-p)$



34. feladat (Kapacitás fölötti jelsebesség) Tegyük fel, hogy egyenletes eloszlással véletlenszerűen sorsolt n hosszúságú bináris stringeket kódolás nélkül továbbítunk egy p hibavalószínűségű bináris szimmetrikus csatornán. Világos, hogy ekkor a jelsebesség nagyobb, mint a csatornakapacitás. Mekkora a dekódolás hibavalószínűsége? Mekkorára érdemes az n blokkhosszat választani?

$P_e = 1 - (1-p)^n$

37. feladat (Időjóslás) Tegyük fel, hogy az esős és napsütéses napok stacionárius Markov lánc szerint követik egymást a következő eloszlás szerint:

$$\mathbf{P}\{\text{ma esni fog}|\text{tegnap esett}\} = 0,5; \quad \mathbf{P}\{\text{ma esni fog}|\text{tegnap sütött a nap}\} = 0,3.$$

Arra próbálok meg reggel dönteni a tegnapi időjárás ismeretében, hogy vigyek-e esernyőt. A költségeim a következők: Ha viszek esernyőt, akkor akár esik, akár nem, 100 Ft a költségem (ez abból adódik, hogy gyakran elvesztem az esernyőmet). Ha nem viszek esernyőt, és süt a nap, akkor nincs költségem. Ha viszont esik, és nincs nálam ernyő, akkor tönkremegy a frizurám, ami 150 forintomba kerül. Mi az optimális döntés, ha tegnap esett, illetve, ha tegnap sütött a nap? Mi a helyzet akkor, ha drága, 200 forintos frizurám van? Mennyi optimális döntés esetén a várható költségem a két esetben?

Az első esetben: $R(G) = 56.25$ Ft, a második esetben: $R(G) = 75$ Ft.