Helle Zita
lizi@math.bme.hu

Matematika B4
2003.11.17.

A mai gyakorlat anyaga a feltételes valószínűség fogalmának kiterjesztése volt a folytonos eloszlásokra. Hogy ezt jobban megértsük, emlékezzünk először is vissza a diszkrét eloszlásnál tanultakra!

Legyen X és Y két diszkrét eloszlású valószínűségi változó, melyek az S_X illetve S_Y halmazból vehetik fel értékeiket. Ekkor ismerjük az alábbi két azonosságot:

1. Tétel (feltételes valószínűség szorzási szabálya diszkrét esetben).

$$P(X = x \textit{ és } Y = y) = P(X = x|Y = y) \cdot P(Y = y) = P(Y = y|X = x) \cdot P(X = x).$$

2. Tétel (teljes valószínűség tétele diszkrét esetben).

$$P(X = x) = \sum_{y \in S_Y} P(X = x \textit{ és } Y = y), \quad \text{és ugyanígy} \quad P(Y = y) = \sum_{x \in S_X} P(Y = y \textit{ és } X = x).$$

Nézzünk most erre egy példát is!

Legyen β egyenletes eloszlású az $S_\beta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon, és legyen α egyenletes eloszlású az $S_\alpha = \{1, 2 \ldots \beta\}$ halmazon!

Ilyen valószínűségi változókat igen könnyedén készíthetünk: β lehet mondjuk egy kockadobás eredménye, α pedig egy kockadobásé, amit csonkolunk, azaz ha a dobásunk az $\{1, 2 \ldots \beta\}$ halmazban van, akkor elfogadjuk, egyéb esetben pedig újra dobunk.

Ekkor természetesen:

$$P(\beta = v) = \frac{1}{6}, \quad \text{és}$$

$$P(\alpha = u \mid \beta = v) = \begin{cases} 1/v, & \text{ha } u \leq v \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Számoljuk ki most a $P(\alpha \textit{ és } \beta)$ együttes valószínűségi eloszlást, a $P(\alpha)$ valószínűségi eloszlást, illetve a $P(\beta \mid \alpha)$ feltételes valószínűségi eloszlást!

$$P(\alpha = u \textit{ és } \beta = v) = P(\alpha = u \mid \beta = v) \cdot P(\beta = v) = \frac{1}{6v}, \quad \text{ha} \quad u \leq v.$$

$$P(\alpha = u) = \sum_{v \in \{1,2,3,4,5,6\}} P(\alpha = u \textit{ és } \beta = v) = \sum_{v \in \{\alpha, \alpha+1, \ldots 6\}} \frac{1}{6v}.$$

$$P(\beta = v \mid \alpha = u) = \frac{P(\beta = v \textit{ és } \alpha = u)}{P(\alpha = u)} = \frac{1}{6v} \cdot \left(\sum_{v \in \{\alpha, \alpha+1, \ldots 6\}} \frac{1}{6v} \right)^{-1} = \frac{1}{v} \cdot \left(\sum_{v \in \{\alpha, \alpha+1, \ldots 6\}} \frac{1}{v} \right)^{-1}.$$

Például:

$$P(\alpha = 4 \textit{ és } \beta = 5) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30}.$$

$$P(\alpha = 4) = \sum_{v \in 4,5,6} \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{1}{6} = \frac{37}{360}.$$

$$P(\beta = 5 | \alpha = 4) = \frac{1/30}{37/360} = \frac{12}{37}.$$

Figyeljük meg, hogy $P(\alpha)$ és $P(\beta)$ egyváltozós függvények, viszont $P(\alpha \textit{ és } \beta)$, $P(\alpha \mid \beta)$ és $P(\beta \mid \alpha)$ mind kétváltozós függvények. Az utóbbi három között a jelentős különbséget csak az adja, hogy $P(\alpha \textit{ és } \beta)$ önmagában egy valószínűségi eloszlás (azaz normált), míg $P(\alpha \mid \beta)$ csak rögzített β, $P(\beta \mid \alpha)$ pedig csak rögzített α esetén valószínűségi eloszlás. A könnyebb érthetőség kedvéért képletben:

$$\sum_{u \in S_\alpha} \sum_{v \in S_\beta} P(\alpha = u \textit{ és } \beta = v) = 1, \quad \text{de}$$

$$\forall v \in S_\beta : \quad \sum_{u \in S_\alpha} P(\alpha = u \mid \beta = v) = 1 \quad \text{és} \quad \forall u \in S_\alpha : \quad \sum_{v \in S_\beta} P(\beta = v \mid \alpha = u) = 1$$

Az itt kapott eredményeket könnyedén táblázatokba is foglalhatjuk az egyváltozós függvényeknek vektorokat, a kétváltozósoknak mátrixokat feleltetve meg:

$$P(\alpha|\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad P(\beta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad P(\alpha \text{ és } \beta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & 0 & 0 \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & 0 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \end{bmatrix}$$

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} \frac{147}{360} & \frac{87}{360} & \frac{57}{360} & \frac{37}{360} & \frac{22}{360} & \frac{12}{360} \end{bmatrix}$$

$$P(\beta|\alpha) = \begin{bmatrix} \frac{60}{147} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{30}{147} & \frac{30}{87} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{20}{147} & \frac{20}{87} & \frac{20}{57} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{15}{147} & \frac{15}{87} & \frac{15}{57} & \frac{15}{37} & 0 & 0 \\ \frac{12}{147} & \frac{12}{87} & \frac{12}{57} & \frac{12}{37} & \frac{12}{22} & 0 \\ \frac{10}{147} & \frac{10}{87} & \frac{10}{57} & \frac{10}{37} & \frac{10}{22} & 1 \end{bmatrix}$$

Most fogalmazzuk át az előző feladatot folytonossá, és vizsgáljuk meg, mit is mondhatunk ekkor a különböző eloszlásokról!

Legyen β egyenletes eloszlású az $S_\beta = [0,1]$ halmazon, és legyen α egyenletes eloszlású az $S_\alpha = [0,\beta]$ halmazon!

Ilyen valószínűségi változókat igen könnyedén készíthetünk, hiszen β éppen RND_1, α-t pedig úgy kapjuk, hogy RND_2-t beszorozzuk $\beta = RND_1$-gyel. Tehát $\beta = RND_1$ és $\alpha = RND_1 \cdot RND_2$.

Jelöljük a továbbiakban α sűrűség- és eloszlásfüggvényét f_α-val, illetve F_α-val, β sűrűség- és eloszlásfüggvényét f_β-val, illetve F_β-val, és az (α,β) együttes sűrűség- és eloszlásfüggvényét pedig rendre $f_{\alpha,\beta}$-val illetve $F_{\alpha,\beta}$-val!

Ekkor természetesen:

$$f_\beta(v) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le v \le 1 \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Legelőször most is számoljuk ki az $f_{\alpha,\beta}$ együttes valószínűségi eloszlást, és az f_α valószínűségi eloszlást!

Az első kiszámolásához a matekórákon már tanult bázistranszformációs módszert fogjuk alkalmazni.

Legyen az eredeti bázisunk $\langle x, y\rangle$, és a függvényünk az eredeti téren az (RND_1, RND_2) sűrűségfüggvénye:

$$f_{RND_1,RND_2}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

hiszen (RND_1, RND_2) független, azonos $U[0,1]$ eloszlású valószínűségi változók. A képtér bázisa legyen $\langle u, v\rangle$.

Ekkor a megfelelő l bázistranszformáció, és annak l^{-1} inverze a következő:

$$l(x,y) = (xy, x), \quad \text{hiszen} \quad l(RND_1, RND_2) = (\alpha, \beta) = (RND_1 \cdot RND_2, RND_1), \quad \text{és ebből}$$

$$l^{-1}(u,v) = (v, \frac{u}{v})$$

Ekkor tehát a megfelelő Jacobi-determináns:

$$det(J) = \begin{vmatrix} v'_u & v'_v \\ \left(\frac{u}{v}\right)'_u & \left(\frac{u}{v}\right)'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1/v & -u/v^2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{v}, \quad \text{azaz} \quad |det(J)| = \frac{1}{v}.$$

Amiből:

$$f_{\alpha,\beta}(u,v) = f_{RND_1,RND_2}(u,v) \cdot \frac{1}{v} = 1 \cdot \frac{1}{v} = \frac{1}{v}.$$

Az f_α kiszámolásához ezután α eloszlásfüggvényét használjuk:

$$P(\alpha < a) = \int_0^a \int_0^1 f_{\alpha,\beta}(u,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \int_0^a f_\alpha(u)\mathrm{d}u, \quad \text{amiből}$$

$$f_\alpha(u) = \int_0^1 f_{\alpha,\beta}(u,v)\mathrm{d}v = \int_u^1 \frac{1}{v}\mathrm{d}v = [ln(|u|)]_u^1 = -\ln(u).$$

Érdemes megfigyelni, hogy ez az utolsó számítási mód teljes egészében általánosítható, s így nyerjük a következő, a diszkrét esethez messzemenőkig hasonlító tételt:

3. Tétel (teljes valószínűség tétele folytonos esetben).

$$f_X(x) = \int_{y \in S_Y} f_{X,Y}(x,y), \quad \text{és ugyanígy} \quad f_Y(y) = \int_{x \in S_X} f_{X,Y}(x,y).$$

Most próbáljuk meg az előző feladathoz hasonlóan kiszámítani a $P(\beta \mid \alpha)$ és $P(\alpha \mid \beta)$ feltételes valószínűségi eloszlásokat!

Sajnos nagyon hamar kiderül, hogy a diszkrét esetekben jól bevált képleteink itt nem alkalmazhatók, hiszen a

$$P(\alpha = u \text{ } \acute{e}s \text{ } \beta = v) = 0 \quad \forall u \in S_\alpha, v \in S_\beta \quad \text{és}$$

$$P(\alpha = u \mid \beta = v) = \frac{P(\alpha = u \text{ } \acute{e}s \text{ } \beta = v)}{P(\beta = v)} \quad \text{értelmetlen} \qquad \forall u \in S_\alpha, v \in S_\beta \quad \text{esetén.}$$

Mit tehetünk tehát? Nos, a helyzet az, hogy ugyanezzel a problémával már rögtön a folytonos valószínűségi változók bevezetésekor is szembesültünk egyszer, s a megoldás a sűrűség- és eloszlásfüggvények használata volt. Érdemes tehát most is ezzel próbálkoznunk.

Emlékezzünk vissza ehhez az $f_{\alpha,\beta}$ együttes sűrűségfüggvény definíciójára:

$$f_{\alpha,\beta}(u,v) = \lim_{\Delta u \to 0} \lim_{\Delta v \to 0} \frac{P(u \le \alpha \le u + \Delta u \text{ és } v \le \beta \le v + \Delta v)}{\Delta u \cdot \Delta v}.$$

Ehhez hasonló módon értelmezzük a feltételes sűrűségfüggvényeket is. Nézzük először $f_{\alpha\,|\,\beta}$-t!

$$f_{\alpha\,|\,\beta}(u,v) = f_{\alpha\,|\,\beta=v}(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \lim_{\Delta v \to 0} \frac{P(u \le \alpha \le u + \Delta u; |; v \le \beta \le v + \Delta v)}{\Delta u} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \lim_{\Delta v \to 0} \frac{P(u \le \alpha \le u + \Delta u \text{ és } v \le \beta \le v + \Delta v)}{P(v \le \beta \le v + \Delta v)} \cdot \frac{1}{\Delta u} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \lim_{\Delta v \to 0} \frac{P(u \le \alpha \le u + \Delta u \text{ és } v \le \beta \le v + \Delta v)}{\Delta u \cdot \Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{P(v \le \beta \le v + \Delta v)} =$$

$$= \frac{f_{\alpha,\beta}(u,v)}{f_\beta(v)}.$$

És ugyanígy

$$f_{\beta\,|\,\alpha}(u,v) = f_{\beta\,|\,\alpha=u}(v) = \frac{f_{\alpha,\beta}(u,v)}{f_\alpha(u)}.$$

Ebből a nevezőkkel való átszorzással kapjuk az alábbi tételt:

4. Tétel (feltételes valószínűség szorzási szabálya folytonos esetben).

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X\,|\,Y}(x,y) \cdot f_Y(y) = f_{Y\,|\,X}(x,y) \cdot f_X(x).$$

Így:

$$f_{\alpha\,|\,\beta}(u,v) = \frac{f_{\alpha,\beta}(u,v)}{f_\beta(v)} = \frac{1/v}{1} = \frac{1}{v}, \quad \text{és}$$

$$f_{\beta\,|\,\alpha}(u,v) = \frac{f_{\alpha,\beta}(u,v)}{f_\alpha(u)} = \frac{1/v}{-\ln(u)} = \frac{-1}{v\ln(u)}$$

Például:

$$f_{\alpha\,|\,\beta}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1/2} = 2.$$

$$f_{\beta\,|\,\alpha}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{1/2\ln(1/3)} \approx 1,8205.$$

Figyeljük meg, hogy itt $f_{\alpha \text{ és } \beta}$, $f_{\alpha\,|\,\beta}$ és $f_{\beta\,|\,\alpha}$ a diszkrét esethez hasonlóan ismét kétváltozós függvények, és az ott felírt egyenlőségek folytonos analogonjai is teljesülni fognak:

$$\int_{S_\beta} \int_{S_\alpha} f_{\alpha,\beta}(u,v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v = 1, \quad \text{illetve}$$

$$\forall v \in S_\beta : \quad \int_{S_\alpha} f_{\alpha\,|\,\beta}(u,v)\mathrm{d}u = 1 \quad \text{és} \quad \forall u \in S_\alpha : \quad \int_{S_\beta} f_{\beta\,|\,\alpha}(u,v)\mathrm{d}v = 1$$

Valóban:

$$\int_0^1 \int_0^v f_{\alpha,\beta}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^1 \int_0^v \frac{1}{v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^1 \left[\frac{u}{v}\right]_0^v \mathrm{d}v = \int_0^1 1\mathrm{d}v = 1, \quad \text{illetve}$$

$$\int_0^v f_{\alpha\,|\,\beta}(u,v) = \int_0^v \frac{1}{v}\mathrm{d}u = \left[\frac{u}{v}\right]_0^v = \frac{v}{v} = 1, \quad \text{és}$$

$$\int_u^1 f_{\beta\,|\,\alpha}(u,v)\mathrm{d}v = \int_u^1 \frac{-1}{v\ln(u)}\mathrm{d}v = \left[\frac{-\ln(|v|)}{\ln(u)}\right]_u^1 = \frac{\ln(u)}{\ln(u)} = 1.$$

És a diszkrét esethez hasonlóan eredményeinket itt is táblázatba foglalhatjuk:

$f_{\alpha\,|\,\beta}(u,v) = \frac{1}{v}$	$f_\beta(v) = 1$	$f_{\alpha,\beta}(u,v) = \frac{1}{v}$
		$f_\alpha(u) = -\ln(u)$
		$f_{\beta\,|\,\alpha}(u,v) = \frac{1/v}{-\ln(u)}$