Helle Zita
lizi@math.bme.hu

Matematika B4
2003.09.22.

1. Definíció (klasszikus probléma). *egy véletlen jelenséghez kapcsolódó megfigyelés, ha véges sok egymást kizáró kimenetel tartozik hozzá, ezen kimenetelek valószínűsége egyforma, és összegük* 1*.*

1. Tétel. *Amennyiben az eseményterünk, E minden elemének azonos a valószínűsége, úgy egy A esemény (halmaz) valószínűségének kiszámítására alkalmazható az alábbi képlet:*

$$\textit{valószínűség} = \frac{\textit{az esemény szempontjából kedvező kimenetelek száma}}{\textit{az összes kimenetel száma}} = \frac{|A|}{|E|}.$$

1. Megjegyzés. ***[kicsit hosszúra sikerült megjegyzés a valószínűségszámítási feladatok természetéről, amit azért érdemes elolvasni]***

Mint arról a gyakorlaton is szó volt, a valószínűségszámítási feladatoknál kulcsfontosságú kérdés, hogy az adott kísérletet, megfigyelést milyen körülmények között végezzük. Egy adott eseménynek ugyanis úgy önmagában valójában nincsen valószínűsége, csak valamihez viszonyítva, csak a körülmények függvényében. Éppen ezért, a feladatok megoldásának talán legfontosabb része, hogy pontosan megértsük a példa szövegét, s így éppen a megfelelő eseményteret válasszuk vizsgálódásainkhoz.

Általános esetben a példában megfogalmazott kísérlet-megfigyelés párhoz tartozó eseménytérre egyáltalán nem igaz, minden elemének azonos volna a valószínűsége (különben nem is lenne túl nagy pláne megoldani a feladatot :)). Ez azért jelenthet gondot, mivel az egyelőre rendelkezésünkre álló egyetlen képlet, a valószínűség $= \frac{\textit{kedvező esetek száma}}{\textit{összes esetek száma}}$ *csak és kizárólag olyan esetekben alkalmazható, mikor az eseménytér minden elemének azonos a valószínűsége. Egy valószínűségszámítási példa megoldásánál tehát az elsődleges feladatunk valójában az, hogy a feladat szövegéből kihámozzuk azt a megfigyelést, azaz eseményteret a megadott kísérlethez, amely alapján kiszámoható a kérdezett valószínűség, és amelyre igaz, hogy minden elemének azonos a valószínűsége.*

Sajnos ez sokszor igen nehéz feladat, és sok gyakorlatot igényel. A problémát lényegében az jelenti, hogy mivel a valóságtól teljesen elvonatkoztatunk, így az éppen megfelelő eseménytér valójában azt az eseményteret jelenti, amire a tanár éppen gondolt a feladat kitűzése közben. És ez nem vicc.

Amikor egy feladatban szabályos kockadobásról beszélünk, és mind a hat oldal felbukkanását egyenlően $\frac{1}{6}$ *valószínűségűnek vesszük, akkor valójában egyáltalán nem foglalkozunk azzal, hogy ez mennyire modellezi jól a valóságban tapasztaltakat. Még inkább látható ez, amikor gyermekszületésekről van szó: a feladat megfogalmaz egy lehetséges születési elvet, s mi ezen belül dolgozunk, nem törődve azzal, hogy ez mennyiben felel meg a - feltehetően létező - valós születési statisztikáknak. Tehát az, hogy a valóságban mi történik, a feladat szempontjából teljesen lényegtelen. A fontos az, hogy kibogarásszuk, hogy a tanár milyen körülményekre is gondolt a példa megfogalmazása közben.*

És valójában ebben van segítségünkre az a néhány közkeletű konvenció (definíció) is, melyeket klasszikus problémaként írtunk fel a táblára, és amiket most itt pontosítanék.

Szabályos n-hosszú érmedobássorozatról akkor beszélünk, ha az eseményterünk az I és F jelekből előállítható összes n-hosszú sorozatot tartalmazza, s mindegyiknek a valószínűsége egyenlően $\frac{1}{2^n}$*. Ez a valóságban jól modellezi azt a helyzetet, hogy egy szabályos érmét egymás után n-szer feldobunk, és megfigyeljük a dobott oldalak sorozatát, de azt is, hogy n darab egymástól megkülönböztethető érmét egyszerre feldobunk, és megfigyeljük a dobások kimenetelét az érmék egy előre rögzített sorrendjében.*

Szabályos n-hosszú kockadobássorozatról akkor beszélünk, ha az eseményterünk az $\{1,2,3,4,5,6\}$ számokból előállítható összes n-hosszú sorozatot tartalmazza, s mindegyiknek a valószínűsége egyenlően $\frac{1}{6^n}$. Ez a valóságban jól modellezi azt a helyzetet, hogy egy szabályos kockát egymás után n-szer feldobunk, és megfigyeljük a dobott számok sorozatát, de azt is, hogy n darab egymástól megkülönböztethető kockát egyszerre feldobunk, és megfigyeljük a dobások értékét a kockák egy előre rögzített sorrendjében.

Szabályos kártyakeverés alatt az $\{a_1, a_2 \ldots a_n\}$ pakli esetén azt értjük, ha az eseményterünk az $\{a_1, a_2 \ldots a_n\}$ elemekből előállítható összes permutációt (sorrendet) tartalmazza, s mindegyiknek a valószínűsége egyenlően $\frac{1}{n!}$. Ez a valóságban jól modellezi azt a helyzetet, hogy egy szabályos n lapos kártyapaklit megkeverünk, majd megfigyeljük a kialakult lapsorrendet.

A későbbiekben még sokszor fogunk megegyezni ezekhez hasonló konvenciókban a "szabályos közlekedésre" vagy mondjuk a "szabályos villanykörtékre" vonatkozóan, de egyelőre vizsgálódásainkban elegendő lesz a fenti három definíció ismerete.

Az, hogy az éppen megfelelő eseménytér kiválasztása után az eseménytér elemeinek, vagy a kedvező eseteknek a megszámlálása miként zajlik, már egyénenként változó lehet. Leírhatjuk sorra a lehetőségeket, használhatunk kombinatorikai megfontolásokat, vagy okoskodhatunk is: amennyiben az eseménytér azonos volt, és gondolatmenetünket nem hibáztuk el, az eredmény minden módszernél ugyanaz kell, hogy legyen.

És akkor most az eddig elmondottak tükrében, nézzük végre a feladatokat :) !

1. Axióma. *Bármely A eseményre $0 \leq P(A) \leq 1$.*

2. Axióma. *A biztos esemény, azaz a teljes E eseménytér valószínűsége $P(E) = 1$. A lehetetlen esemény, azaz az $A = \emptyset$ esmény valószínűsége $P(A) = 0$.*

3. Axióma. *Amennyiben az A esemény felbontható véges sok, vagy megszámlálhatóan végtelen sok olyan $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ eseményekre, melyekre igaz, hogy $i \neq j \to A_i \cap A_j = \emptyset$, és $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$, akkor $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.*

2. Tétel. *Bármely A eseményre $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.*

1. Két szabályos kockával dobunk, és megfigyeljük a dobott számpár összegét. Mi ekkor az eseménytér, és mi a valószínűsége az egyes kimeneteleknek?

Két szabályos dobás összegeként a $2, 3, 4 \ldots 12$ számok állhatnak elő, így ehhez a megfigyeléshez a $E = \{2, 3, 4 \ldots 12\}$ eseménytér tartozik.

A valószínűségek kiszámítása ennél azért kicsivel nehezebb, hiszen erről a kísérlet-megfigyelés párról nem tudjuk, hogy a hozzá tartozó eseménytér minden eleme azonos valószínűségű volna. Amit viszont könnyedén meg tudunk tenni, az az, hogy visszavezetjük a feladatot a szövegben szereplő klasszikus problémára.

Ehhez először is különböztessük meg valamiképpen kockáinkat, mondjuk fessük az egyiket zöldre, a másikat pirosra, majd rögzítsünk köztük egy sorrendet, mondjuk *(piros, zöld)*. Ekkor már használhatjuk a 2 szabályos kocka feldobása klasszikus problémához tartozó eseményteret, s a jól ismert képletünket is. Tehát az eseménytér az alábbi:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

És ezután már nem okoz gondot a kedvező kimenetelek leszámlálása sem, mely alapján a kapott valószínűségek:

$$\begin{array}{lllll}
P(2) = \frac{1}{36} & P(3) = \frac{2}{36} & P(4) = \frac{3}{36} & P(5) = \frac{4}{36} & \\
P(4) = \frac{3}{36} & P(5) = \frac{4}{36} & P(6) = \frac{5}{36} & P(7) = \frac{6}{36} & \\
P(8) = \frac{5}{36} & P(9) = \frac{4}{36} & P(10) = \frac{3}{36} & P(11) = \frac{2}{36} & P(12) = \frac{1}{36}
\end{array}$$

2. Mi a valószínűsége annak, hogy egy háromgyermekes családban a gyerekek mind egyneműek, ha a lányok és a fiúk születési valószínűségét egyenlőnek tekintjük?

Nos, ez a feladat éppen egy remek példa a pongyola megfogalmazásra, s így az olvasótól függően más és más lehet a kapott valószínűség. A szövegből ugyanis valójában nem derül ki egyértelműen, hogy az az eseménytér, melyben minden elemi esemény valószínűsége egyenlő, melyik az alábbi kettő közül:

(Fiú,Fiú,Fiú)	(Lány,Fiú,Fiú)
(Fiú,Fiú,Lány)	(Lány,Fiú,Lány)
(Fiú,Lány,Fiú)	(Lány,Lány,Fiú)
(Fiú,Lány,Lány)	(Lány,Lány,Lány)

{Fiú,Fiú,Fiú}	{Fiú,Lány,Lány}
{Fiú,Fiú,Lány}	{Lány,Lány,Lány}

Ami ilyen helyzetekben segíthet az eligazodásban, az a valószínűségszámítási feladatokban való jártasság (vagy a tanár alapos ismerete :)). Itt például, arra hivatkozva, hogy ez az általánosan bevett szokás, most az első eseménytérrel fogunk számolni.

Tehát a valószínűség:

$$P(\textit{mindhárom gyerek egynemű}) = \frac{2}{8}.$$

3. Kivesszük a piros figurákat egy magyar kártya csomagból, megkeverjük őket, majd sorban kitesszük őket az asztalra. Mi a valószínűsége annak, hogy a kapott sorban előbb lesz az alsó, mint a felső?

Itt természetesen szabályos kártyacsomagról van szó, így az eseményterünk az $\{A, F, K, Á\}$ halmaz összes lehetséges sorrendjéből (permutációjából) fog állni, melyek száma 4!, és használhatjuk a tanult képletet.

A kedvező esetek száma pedig 12, melyet akár a lehetőségek felsorolásával, akár kombinatorikai megfontolásokkal megkaphatunk (aki nem hiszi, járjon utána).

Tehát a kérdezett valószínűség:

$$P(\textit{az alsó előbb van, mint a felső}) = \frac{12}{4!} = 0,5.$$

4. Mi a valószínűsége annak, hogy egy szabályosan kitöltött és feladott lottószelvénnyel nyerünk az ötöslottón, azaz legalább 2 találatunk lesz?

Válasszuk eseménytérnek a 90 szám összes 5-ödrendű kombinációit, azaz az összes lehetséges esetet, ahogy egy ötelemű halmazt kiválaszthatunk az $\{1, 2, 3 \dots 90\}$ halmazból. Ennek elemszáma $|E| = \binom{90}{5}$.

Mivel feltételezzük, hogy minden szám-ötös azonos valószínűséggel kerül kihúzásra (így például annak a valószínűsége, hogy a $15, 32, 47, 60, 85$ számokat húzzák ugyanannyi, mint anak a valószínűsége, hogy az $1, 2, 3, 4, 5$ számokat húzzák!), így ebben az eseménytérben használhatjuk a jól bevált képletünket.

Már csak a kedvező kimeneteleket kell valamiképpen leszámolnunk. Jól látható, hogy itt a felsorolás nem lenne túl célravezető, mivel az összesen 43949268 elemi esemény közül feltehetőleg nagyon sok a kedvező is. Ezért inkább kombinatorikai megfontolásokat használunk:

$$P(\textit{legalább 2 találatunk lesz}) =$$

$$= P(\textit{pontosan 2, vagy pontosan 3, vagy pontosan 4, vagy pontosan 5 találatunk lesz}) =$$

$$= P(\textit{pontosan 2 találatunk lesz}) + P(\textit{pontosan 3 találatunk lesz}) +$$

$$+ P(\textit{pontosan 4 találatunk lesz}) + P(\textit{pontosan 5 találatunk lesz}) =$$

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} + \frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}} =$$

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3} + \binom{5}{3}\binom{85}{2} + \binom{5}{4}\binom{85}{1} + \binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}}.$$

2. Megjegyzés. *Ezen feladat megoldása során valójában egy újabb konvencióban egyeztünk meg: az ötöslottósorsolás mint kísérlet a kihúzott számhalmaz megfigyelésével egy klasszikus problémát alkot, melynek eseménytere a* $\binom{90}{5}$ *lehetséges nyerőszámhalmaz összessége.*

Itt valójában ugyanezt a végeredményt kaptuk volna, ha eseménytérnek a lehetséges kihúzott számsorozatok összességét, azaz a 90 szám összes 5-ödrendű variációját választottuk. Ekkor az eseményterünk számosága $\frac{90!}{85!}$ *lett volna, ami jóval több, mint a fenti esetben, ám jól látható, hogy ekkor a kedvező esetek száma is megnőtt volna, s így a kiszámolt valószínűség végül megegyezett volna a fentivel.*

$$P(\textit{legalább 2 találatunk lesz}) = \frac{\frac{5!}{3!}\frac{85!}{82!} + \frac{5!}{2!}\frac{85!}{83!} + \frac{5!}{1!}\frac{85!}{84!} + \frac{5!}{0!}\frac{85!}{85!}}{\frac{90!}{85!}}.$$

És szintén igaz, hogy az ötöslottósorsolás mint kísérlet a kihúzott számsorozat megfigyelésével egy klasszikus problémát alkot, melynek eseménytere a $\frac{90!}{85!}$ *lehetséges nyerőszámsorozat összessége, így a továbbiakban ezt a konvenciót is felhasználhatjuk.*

5. Egy urnában 3 piros, 2 fehér és 1 kék golyó van, ezeket visszatevés nélkül, csukott szemmel sorban kihúzzuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a kéket húzzuk ki utolsónak? És annak, hogy egy pirosat? És annak, hogy egy fehéret?

Mivel megfigyelésünk a 6 kihúzott golyó sorrendje, így eseménytérnek a lehetséges ilyen sorrendek összességét választjuk. Ennek számossága $\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}$ (ismétléses permutáció).

Most vizsgáljuk azon esetek számát, amikor a kék golyót húzzuk ki utoljára! Ha a kék az utolsó, akkor előtte még ki kell húznunk a 3 piros és 2 fehér golyót. Ezt $\frac{5!}{3!\cdot 2!}$ féle képpen tehetjük meg.

Tehát a keresett valószínűség:

$$P(\textit{kéket húzunk utoljára}) = \frac{\frac{5!}{3!\cdot 2!}}{\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}}.$$

Hasonló megfontolásokból következik, hogy

$$P(\textit{pirosat húzunk utoljára}) = \frac{\frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!}}{\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}}, \textit{ és}$$

$$P(\textit{fehéret húzunk utoljára}) = \frac{\frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!}}{\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}}.$$

6. Hány szabályos kockát kell feldobni ahhoz, hogy legalább 99% valószínűséggel legyen a dobott számok között legalább egy hatos?

Ez a feladat annyival nehezebb az eddigieknél, hogy most valójában nem egy megadott esemény valószínűségének kiszámítása a feladat, hanem egy olyan eseménytér megkeresése, ahol a megadott esemény a megadott valószínűséggel következik be. Lássuk, hogyan gondolkodhatunk ebben az esetben!

A konvencióink szerint k kocka feldobásához egy 6^k elemű klasszikus eseménytér tartozik. Jelöljük most ezen 6^k kimenetel közül $A(k)$-val azon esetek halmazát, mikor a dobott számok között legalább 1 hatos van.

Ha meg tudjunk mondani $|A(k)|$ értékét k függvényében, akkor a jól bevált

$$P(\textit{legalább } 1 \textit{ hatos van a dobott számok között}) = \frac{|A(k)|}{6^k} \geq 0,99$$

képlettel gyorsan kiszámolhatjunk k értékét.

Jelöljük most $B(k)$-val azon esetek halmazát, amelyekben egyetlen hatost sem dobunk! Mivel $A(k)$ és $B(k)$ komplementer halmazok, így $|A(k)| + |B(k)| = 6^k$, azaz elég lenne $|B(k)|$ értékét meghatároznunk a feladat megoldásához.

$B(k)$ viszont éppen az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ számokból előáló k hosszúságú sorozatokat tartalmazza, így számossága 5^k.

Tehát az egyenletünk: $\frac{|A(k)|}{6^k} = \frac{6^k - 5^k}{6^k} \geq 0,99$, ahonnan $k = 12$.

7. Egy szabályos dobókockával addig dobunk, míg először hatost dobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ehhez szükséges dobások száma egy? És hogy három? És hogy több, mint négy?

$$P(\textit{az első hatoshoz szükséges dobások száma 1}) = P(\textit{elsőre hatost dobunk}) = \frac{1}{6}.$$

$$P(\textit{az első hatoshoz szükséges dobások száma 3}) = \frac{25}{216}$$

$$P(az\ első\ hatoshoz\ szükséges\ dobások\ száma\ több,\ mint\ 4) =$$
$$= 1 - P(az\ első\ hatoshoz\ szükséges\ dobások\ száma\ legfeljebb\ 4) =$$
$$= 1 - P(az\ első\ hatoshoz\ szükséges\ dobások\ száma\ 1\ vagy\ 2\ vagy\ 3\ vagy\ 4) =$$
$$= 1 - P(az\ első\ hatoshoz\ szükséges\ dobások\ száma\ 1) - P(az\ első\ hatoshoz\ szükséges\ dobások\ száma\ 2)+$$
$$-P(az\ első\ hatoshoz\ szükséges\ dobások\ száma\ 3) - P(az\ első\ hatoshoz\ szükséges\ dobások\ száma\ 4) =$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} + \frac{125}{1296}\right) = \frac{625}{1296}.$$

8. Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám előjön?

$$P(mind\ a\ hat\ szám\ előjön) = \frac{6!}{6^6}.$$

3. Megjegyzés. ***[megjegyzés a kombinatorikai leszámlálásokról]***

	ismétlés nélküli	*ismétléses*
permutáció	$n!$	$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_l!}$
variáció	$\frac{n!}{(n-k)!}$	l^k
kombináció	$\binom{n}{k}$	$\binom{k+l-1}{l-1}$ *(ezt nem kell tudni)*

Ismétlés nélküli estről akkor beszélünk, ha a feladatban szereplő n dolog mindegyike megkülönböztethető: mondjuk különböző neveik vannak, vagy mind különböző színű vagy alakú, stb...

Ismétléses eset akkor áll fenn, ha a feladatban szereplő n dolog nem különböztethető meg egyesével, csak csoportokra osztható. Ilyen az, ha van mondjuk n_1 darab zöld, n_2 darab kék, $\ldots n_l$ darab piros golyóm, vagy szélsőséges esetben mondjuk jár az osztályba n_1 Anna, n_2 Balázs, $\ldots n_l$ Péter. Természetesen itt mindig feltétel, hogy $n_1 + n_2 + \ldots n_l = n$ legyen.

Permutációról akkor beszélünk, ha a szóban forgó n dolog lehetséges sorrendjeire vagyunk kíváncsiak. Ide tartozik az, amikor egy kalapból sorra kihúzzuk a tárgyakat, vagy egy padra ültetünk le sorban embereket, vagy kártyát keverünk. [az összes sorbarendezése]

Variáció alatt azt értjük, mikor a szóban forgó n dolog közül csak az első k sorrendjeire vagyunk kíváncsiak. Azaz a kalapból csak k darab tárgyat húzunk ki sorra, a pad rövid, így csak k embert ültetünk le rá sorban, a kártyák közül csak az első k darab sorrendjét, vagy egy bajnokságon csak az első k helyezett sorrendjét vizsgáljuk (amennyiben nincs döntetlen). Természetesen $k = n$ esetben ez éppen a permutációt jelenti. [$k < n$ sorbarendezése]

Végül kombinációról akkor beszélünk, ha az n dolog közül kiválasztott k-nak a sorrendjére egyáltalán nem vagyunk kíváncsiak, csak arra, hogy melyik k dolog került végeredményben kiválasztásra. Itt tipikus példa a lottósorsolás, ahol a kihúzott számok sorrendje egyáltalán nem fontos, vagy a kártyaosztás, ahol szintén csak az számít, hogy végül mely lapok kerülnek a kezünkbe, az nem, hogy milyen sorrendben kapjuk őket. [$k < n$ kiválasztása]