A számítástudomány alapjai

Mátrixegyenletek

2022. december 8. Hatvan

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során?

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \qquad \leftrightarrow \qquad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -3 & 5 & -6 \\ 7 & 2 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -2 & 11 \end{array}\right)$$

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix, $\underline{b}$ a konstansokat, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

A mátrixokat a lineáris egyenletrendszerek módszeres megoldásához vezettük be, majd különféle hasznos dolgokat tudtunk meg a róluk. Fel tudjuk-e használni ezt a tudást a lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos problémák megoldása során? Hát persze. Figyeljük meg, hogy a lineáris egyenletrendszer voltaképp egy mátrixegyenlet.

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix, $\underline{b}$ a konstansokat, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Kínzó kérdés: Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható?

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix, $\underline{b}$ a konstansokat, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Kínzó kérdés: Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható?

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix, $\underline{b}$ a konstansokat, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Kínzó kérdés: Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható?

Frappáns válasz: A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan $\underline{x}$ oszlopvektor (konkrét számokkal), amire $A\underline{x} = \underline{b}$ teljesül.

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix, $\underline{b}$ a konstansokat, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Kínzó kérdés: Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható?

Frappáns válasz: A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan $\underline{x}$ oszlopvektor (konkrét számokkal), amire $A\underline{x} = \underline{b}$ teljesül.

Láttuk: $\forall A, C$ mátrixokra (C előáll $C = AB$ alakban) $\iff$

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix, $\underline{b}$ a konstansokat, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Kínzó kérdés: Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható?

Frappáns válasz: A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan $\underline{x}$ oszlopvektor (konkrét számokkal), amire $A\underline{x} = \underline{b}$ teljesül.

Láttuk: $\forall A, C$ mátrixokra (C előáll $C = AB$ alakban) $\iff$ (C minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja)

Lineáris egyenletrendszerek, már megint

Példa:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 7x_3 - 2x_4 &= 11 \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad A\underline{x} = \underline{b}$$

Megf: Az $(A|\underline{b})$ kib.egyhómx-hoz tartozó lineáris egyenletrendszer ekvivalens az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlettel, ahol A az együtthatómátrix, $\underline{b}$ a konstansokat, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ pedig az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor.

Kínzó kérdés: Mit jelent mátrix-vektor terminológiában, hogy az $A\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható?

Frappáns válasz: A kérdés voltaképpen az, hogy mikor található olyan $\underline{x}$ oszlopvektor (konkrét számokkal), amire $A\underline{x} = \underline{b}$ teljesül.

Láttuk: $\forall A, C$ mátrixokra (C előáll $C = AB$ alakban) $\iff$ (C minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja)

Köv: Ha A oszlopai $A^1, \ldots$, akkor $(\exists \underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}) \iff (\underline{b} \in \langle A^1, \ldots \rangle)$ $\iff (\langle A^1, \ldots \rangle = \langle \underline{b}, A^1, \ldots \rangle) \iff (\dim \langle A^1, \ldots \rangle = \dim \langle \underline{b}, A^1, \ldots \rangle)$

n ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszerek érdekes speciális esete, ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Ilyenkor az együtthatómátrix négyzetes. Korábban láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

n ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszerek érdekes speciális esete, ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Ilyenkor az együtthatómátrix négyzetes. Korábban láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

Kínzó kérdés: Lehet-e a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrixból következtetni?

n ismeretlenes, *n* egyenletből álló egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszerek érdekes speciális esete, ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Ilyenkor az együtthatómátrix négyzetes. Korábban láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

Kínzó kérdés: Lehet-e a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrixból következtetni?

Válasz: Lehet, de csak akkor, ha az együtthatómátrix négyzetes. Ha a mátrixnak több oszlopa van, mint ahány sora, akkor biztosan nem egyértelmű a megoldás, ha pedig a sorok száma több, akkor az egyértelműség a jobboldali $\underline{b}$ vektoron is múlik.

n ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszerek érdekes speciális esete, ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Ilyenkor az együtthatómátrix négyzetes. Korábban láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

Kínzó kérdés: Lehet-e a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrixból következtetni?

Válasz: Lehet, de csak akkor, ha az együtthatómátrix négyzetes. Ha a mátrixnak több oszlopa van, mint ahány sora, akkor biztosan nem egyértelmű a megoldás, ha pedig a sorok száma több, akkor az egyértelműség a jobboldali $\underline{b}$ vektoron is múlik.

Állítás: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $(A\underline{x} = \underline{b}$ egyért. megoldható$) \Longleftrightarrow (|A| \neq 0)$

n ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszerek érdekes speciális esete, ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Ilyenkor az együtthatómátrix négyzetes. Korábban láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

Kínzó kérdés: Lehet-e a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrixból következtetni?

Válasz: Lehet, de csak akkor, ha az együtthatómátrix négyzetes. Ha a mátrixnak több oszlopa van, mint ahány sora, akkor biztosan nem egyértelmű a megoldás, ha pedig a sorok száma több, akkor az egyértelműség a jobboldali $\underline{b}$ vektoron is múlik.

Állítás: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $(A\underline{x} = \underline{b}$ egyért. megoldható$) \Longleftrightarrow (|A| \neq 0)$

Biz: $\Rightarrow$: Tfh A oszlopai nem lin.ftn-ek, azaz $\exists \underline{y} \neq \underline{0}: \ A\underline{y} = \underline{0}$. Ha $A\underline{x} = \underline{b}$, akkor $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$, tehát mégsem egyértelmű az $A\underline{x} = \underline{b}$ megoldása, hisz $\underline{x} + \underline{y} \neq \underline{x}$ is megoldás. Ez ellentmondás, tehát A oszlopai lin.ftn-ek, ezért $|A| \neq 0$.

n ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszerek érdekes speciális esete, ha az egyenletek és ismeretlenek száma megegyezik. Ilyenkor az együtthatómátrix négyzetes. Korábban láttuk, hogy n ismeretlen esetén legalább n egyenlet szükséges ahhoz, hogy a megoldás egyértelmű legyen.

Kínzó kérdés: Lehet-e a megoldás egyértelműségére pusztán az együtthatómátrixból következtetni?

Válasz: Lehet, de csak akkor, ha az együtthatómátrix négyzetes. Ha a mátrixnak több oszlopa van, mint ahány sora, akkor biztosan nem egyértelmű a megoldás, ha pedig a sorok száma több, akkor az egyértelműség a jobboldali $\underline{b}$ vektoron is múlik.

Állítás: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $(A\underline{x} = \underline{b}$ egyért. megoldható$) \Longleftrightarrow (|A| \neq 0)$

Biz: $\Rightarrow$: Tfh A oszlopai nem lin.ftn-ek, azaz $\exists \underline{y} \neq \underline{0}: \ A\underline{y} = \underline{0}$. Ha $A\underline{x} = \underline{b}$, akkor $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$, tehát mégsem egyértelmű az $A\underline{x} = \underline{b}$ megoldása, hisz $\underline{x} + \underline{y} \neq \underline{x}$ is megoldás. Ez ellentmondás, tehát A oszlopai lin.ftn-ek, ezért $|A| \neq 0$.

$\Leftarrow$: $|A| \neq 0$, ezért A-nak van inverze. Így

$$\left[A\underline{x} = \underline{b}\right] \iff \left[\underline{x} = (A^{-1}A)\underline{x} = A^{-1}(A\underline{x}) = A^{-1}\underline{b}\right]. \qquad \square$$

Egy hasznos tétel.

Determinánsok szorzástétele: Ha A és B mindketten $n \times n$-es mátrixok, akkor $det(AB) = det(A)det(B)$.
Ezt a tételt nem bizonyítjuk.

Köszönöm a figyelmet!