

A számítástudomány alapjai

Mátrixműveletek és lineáris leképezések

2022. november 25. Hatvan

Mátrixműveletek vektorműveletekből

Vektorokon értelmeztük az összeadást és a skalárral szorzást. Az oszlopokat egymás alá írva bármely $n \times k$ méretű mátrixot értelmezhetünk $n \cdot k$ magasságú oszlopvektorként is. Ezzel értelmezni tudjuk az **azonos méretű** mátrixokon az összeadást és a skalárral szorzást.

Példa:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 1 & 606 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 42 \\ 7 & 4242 & 77 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ nem értelmes.}$$

Mátrixműveletek vektorműveletekből

Vektorokon értelmeztük az összeadást és a skalárral szorzást. Az oszlopokat egymás alá írva bármely $n \times k$ méretű mátrixot értelmezhetünk $n \cdot k$ magasságú oszlopvektorként is. Ezzel értelmezni tudjuk az **azonos méretű** mátrixokon az összeadást és a skalárral szorzást.

Mátrixműveletek vektorműveletekből

Vektorokon értelmeztük az összeadást és a skalárral szorzást. Az oszlopokat egymás alá írva bármely $n \times k$ méretű mátrixot értelmezhetünk $n \cdot k$ magasságú oszlopvektorként is. Ezzel értelmezni tudjuk az **azonos méretű** mátrixokon az összeadást és a skalárral szorzást.

Megf: Ha $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times k}$ és $\lambda, \kappa \in R$, akkor (1) $A + B = B + A$,
(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$, (3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
(4) $(\lambda + \kappa)A = \lambda A + \kappa A$, (5) $\lambda(\kappa A) = (\lambda \kappa)A$, továbbá
(6) $(A + B)^T = A^T + B^T$, (7) $\lambda \cdot A^T = (\lambda A)^T$.

Mátrixműveletek vektorműveletekből

Vektorokon értelmeztük az összeadást és a skalárral szorzást. Az oszlopokat egymás alá írva bármely $n \times k$ méretű mátrixot értelmezhetünk $n \cdot k$ magasságú oszlopvektorként is. Ezzel értelmezni tudjuk az **azonos méretű** mátrixokon az összeadást és a skalárral szorzást.

Megf: Ha $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times k}$ és $\lambda, \kappa \in R$, akkor (1) $A + B = B + A$,
(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$, (3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
(4) $(\lambda + \kappa)A = \lambda A + \kappa A$, (5) $\lambda(\kappa A) = (\lambda \kappa)A$, továbbá
(6) $(A + B)^T = A^T + B^T$, (7) $\lambda \cdot A^T = (\lambda A)^T$.

Vektorok egymással történő összeszorzását nem értelmeztük eddig. Most fogjuk, de bizonyos korlátokkal. Ehhez először azonos méretű vektorokat tanulunk meg összeszorozni.

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok **skaláris szorzata**

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok **skaláris szorzata**

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill.

(1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$,

(3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok **skaláris szorzata**

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$,

(2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Megj: (1) Világos, hogy ha $\underline{u} = \underline{0}$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ám a fordított következtetés nem igaz, pl $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok **skaláris szorzata**

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$,

(2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Megj: (1) Világos, hogy ha $\underline{u} = \underline{0}$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ám a fordított következtetés nem igaz, pl $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

(2) A skaláris szorzás segítségével értelmezhető a vektorhossz és a merőlegesség (akár magasabb dimenzióban is).

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok **skaláris szorzata**

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$,

(2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Megj: (1) Világos, hogy ha $\underline{u} = \underline{0}$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ám a fordított következtetés nem igaz, pl $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

(2) A skaláris szorzás segítségével értelmezhető a vektorhossz és a merőlegesség (akár magasabb dimenzióban is).

Megf: A $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vektor hossza az a, b, c oldalakkal rendelkező téglatest testátlójának hossza, ami a Pitagorasz-tétel alapján

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok **skaláris szorzata**

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$,

(2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Megj: (1) Világos, hogy ha $\underline{u} = \underline{0}$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ám a fordított következtetés nem igaz, pl $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

(2) A skaláris szorzás segítségével értelmezhető a vektorhossz és a merőlegesség (akár magasabb dimenzióban is).

Megf: A $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vektor hossza az a, b, c oldalakkal rendelkező téglatest testátlójának hossza, ami a Pitagorasz-tétel alapján $\|\underline{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ugyanez, másképp felírva: $\|\underline{v}\|^2 = \underline{v} \cdot \underline{v}$.

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok **skaláris szorzata**

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$,

(2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Megj: (1) Világos, hogy ha $\underline{u} = \underline{0}$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ám a fordított következtetés nem igaz, pl $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

(2) A skaláris szorzás segítségével értelmezhető a vektorhossz és a merőlegesség (akár magasabb dimenzióban is).

Megf: A $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vektor hossza az a, b, c oldalakkal rendelkező téglatest testátlójának hossza, ami a Pitagorasz-tétel alapján

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad \text{Ugyanez, másképp felírva: } \|\underline{v}\|^2 = \underline{v} \cdot \underline{v}.$$

Megj: Az \underline{u} és \underline{v} vektorok merőlegessége azt jelenti, hogy

$$\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 = \|\underline{u} - \underline{v}\|^2$$

A skaláris szorzás

Def: Az $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vektorok **skaláris szorzata**

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

Megf: $\forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén (1) $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$,

(2) $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$ ill. (3) $(\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} \cdot \underline{v})$.

Megj: (1) Világos, hogy ha $\underline{u} = \underline{0}$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$, akkor $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, ám a fordított következtetés nem igaz, pl $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

(2) A skaláris szorzás segítségével értelmezhető a vektorhossz és a merőlegesség (akár magasabb dimenzióban is).

Megf: A $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vektor hossza az a, b, c oldalakkal rendelkező téglatest testátlójának hossza, ami a Pitagorasz-tétel alapján

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \quad \text{Ugyanez, másképp felírva: } \|\underline{v}\|^2 = \underline{v} \cdot \underline{v}.$$

Megj: Az \underline{u} és \underline{v} vektorok merőlegessége azt jelenti, hogy $\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 = \|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = (\underline{u} - \underline{v}) \cdot (\underline{u} - \underline{v}) = \underline{u} \cdot \underline{u} + \underline{v} \cdot \underline{v} - 2\underline{u} \cdot \underline{v} = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v}$, innen $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ adódik. Tehát $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \iff \underline{u} \perp \underline{v}$.

Mátrixok szorzása

Az \mathbb{R}^n -beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Mátrixok szorzása

Az \mathbb{R}^n -beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Mátrixok szorzása

Az \mathbb{R}^n -beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az \mathbb{R}^n -beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^T \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^T \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az \mathbb{R}^n -beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^T \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^T \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az \mathbb{R}^n -beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^T \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^T \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az \mathbb{R}^n -beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az \mathbb{R}^n -beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az \mathbb{R}^n -beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az \mathbb{R}^n -beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az \mathbb{R}^n -beli (oszlop)vektorok $n \times 1$ méretű mátrixnak is tekinthetők. Két ilyen vektort ($n > 1$ esetén) nem lehet összeszorozni, de ha az egyiket transzponáljuk, akkor már igen: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\underline{u}^\top \cdot \underline{v} := \underline{u} \cdot \underline{v}$, vagyis egy n dimenziós sor- és oszlopvektor szorzata egy 1×1 méretű mátrix, ami a két vektor skaláris szorzatát tartalmazza.

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.

$$(1) \lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot C)$$

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^T \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.

$$(1) \lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot C)$$

Biz: A skaláris szorzásról tanult azonosság szerint

$\lambda(\underline{u} \cdot \underline{v}) = (\lambda \underline{u}) \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot (\lambda \underline{v})$. Ezért mindhárom szorzatban az i -dik sor j -dik eleme az A i -dik sora és B j -dik oszlopa skaláris szorzatának a λ -szorosa ($\forall i, j$ esetén). □

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.

$$(1) \lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot C)$$

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.

$$(1) \lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot C)$$

$$(2) A(B + C) = AB + AC \quad \text{ill.} \quad (A + B)C = AC + BC.$$

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^T \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.

$$(1) \lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot C)$$

$$(2) A(B + C) = AB + AC \quad \text{ill.} \quad (A + B)C = AC + BC.$$

Biz: Tudjuk, hogy $\underline{u} \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$. Ezért $A(B + C)$ ill. $AB + AC$ i -dik sorának j -dik eleme az A i -dik sorának és B és C j -dik oszlopai összegének skaláris szorzata ($\forall i, j$ esetén). A másik disztributivitás a skaláris szorzás $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}$ azonosságából következik. □

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.

$$(1) \lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot C)$$

$$(2) A(B + C) = AB + AC \quad \text{ill.} \quad (A + B)C = AC + BC.$$

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.

- (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot C)$
- (2) $A(B + C) = AB + AC$ ill. $(A + B)C = AC + BC$.
- (3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

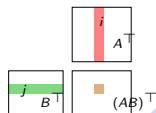
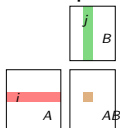
Példa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.

- (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot C)$
- (2) $A(B + C) = AB + AC$ ill. $(A + B)C = AC + BC$.
- (3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Biz: $(AB)^\top$ j -dik sorának i -dik eleme az A i -dik sorának és B j -dik oszlopának a skaláris szorzata, ami ugyanaz, mint B^\top j -dik sorának és A^\top i -dik oszlopának a skaláris szorzata ($\forall i, j$ esetén). \square



Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.

- (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot C)$
- (2) $A(B + C) = AB + AC$ ill. $(A + B)C = AC + BC$.
- (3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.

- (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot C)$
- (2) $A(B + C) = AB + AC$ ill. $(A + B)C = AC + BC$.
- (3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Megj: Ha AB és BA is értelmes, akkor $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Ekkor $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $BA \in \mathbb{R}^{k \times k}$. Azonban még $k = n$ esetén sem igaz általában, hogy $AB = BA$. (Ld. a 2-dik példát.)
Így aztán a mátrixszorzás nem kommutatív.

Mátrixok szorzása

Def: Tfh az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **sorvektorai** $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ és a $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ mátrix **oszlopvektorai** $\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^\ell$. Ekkor az $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ szorzatmátrix i -dik sorának j -dik eleme az $\underline{a}_i^\top \cdot \underline{b}^j$ skaláris szorzat.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ill.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megf: Ha a képletek bal oldala értelmes, akkor igazak az alábbi azonosságok.

- (1) $\lambda \cdot AB = (\lambda A)B = A(\lambda \cdot C)$
- (2) $A(B + C) = AB + AC$ ill. $(A + B)C = AC + BC$.
- (3) $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Megj: Ha AB és BA is értelmes, akkor $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$. Ekkor $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $BA \in \mathbb{R}^{k \times k}$. Azonban még $k = n$ esetén sem igaz általában, hogy $AB = BA$. (Ld. a 2-dik példát.)

Így aztán a mátrixszorzás nem kommutatív.

Megj: A mátrixszorzás asszociatív (átzárójelezhető), de ezt később bizonyítjuk. (A def.-ből is belátható, de az nem túl elegáns.)

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

Biz: Könnyen látszik a definícióból.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \hline & & j & & & \\ \hline & & A & & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \end{array} \underline{e}_j$$
$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \hline \end{array} A \underline{e}_j$$

Az \underline{e}_j^T -tal szorzás hasonló tulajdonsága következik az oszlopokról szóló fenti állításból és a transzponáltak szorzásáról tanultakból. \square

Az itt látható ábra „transzponáltjának” segítségével sem nehéz erről meggyőződni.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

Biz: Az $A \cdot I_k$ mátrix j -dik oszlopa definíció szerint $A \cdot \underline{e}_j$. Ez (1) miatt épp az A mátrix j -dik oszlopa $\forall j$.

Hasonlóan, $I_n \cdot A$ i -dik sora (1) miatt az A i -dik sora $\forall i$. □

$$(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

Biz: Az $A \cdot I_k$ mátrix j -dik oszlopa definíció szerint $A \cdot \underline{e}_j$. Ez (1) miatt épp az A mátrix j -dik oszlopa $\forall j$.

Hasonlóan, $I_n \cdot A$ i -dik sora (1) miatt az A i -dik sora $\forall i$. □

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

Biz: Az $A \cdot I_k$ mátrix j -dik oszlopa definíció szerint $A \cdot \underline{e}_j$. Ez (1) miatt épp az A mátrix j -dik oszlopa $\forall j$.

Hasonlóan, $I_n \cdot A$ i -dik sora (1) miatt az A i -dik sora $\forall i$. □

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

Biz: Az $A \cdot I_k$ mátrix j -dik oszlopa definíció szerint $A \cdot \underline{e}_j$. Ez (1) miatt épp az A mátrix j -dik oszlopa $\forall j$.

Hasonlóan, $I_n \cdot A$ i -dik sora (1) miatt az A i -dik sora $\forall i$. □

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^\top \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak $\underline{v}^T \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak $\underline{v}^T \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Biz: Tfh $\underline{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$. Ekkor $\underline{u} = \lambda_1 \underline{e}_1 + \dots + \lambda_k \underline{e}_k$, így aztán

$A \cdot \underline{u} = A \cdot (\lambda_1 \underline{e}_1 + \dots + \lambda_k \underline{e}_k) = \lambda_1 A \cdot \underline{e}_1 + \dots + \lambda_k A \cdot \underline{e}_k$, és (1) miatt $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa $\forall j$.

A $\underline{v} \cdot A$ -ra vonatkozó tulajdonság hasonlóan igazolható. □

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak $\underline{v}^T \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak $\underline{v}^T \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$. Ekkor

(1) az AB szorzat j -dik oszlopa az $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat a \underline{b}^j oszlop tartalmazza.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak $\underline{v}^T \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$. Ekkor

(1) az AB szorzat j -dik oszlopa az $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat a \underline{b}^j oszlop tartalmazza.

(2) Hasonlóan, az i -dik sor a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ sorok lineáris kombinációja, az \underline{a}_i sorban szereplő együtthatókkal.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak $\underline{v}^T \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$. Ekkor

(1) az AB szorzat j -dik oszlopa az $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat a \underline{b}^j oszlop tartalmazza.

(2) Hasonlóan, az i -dik sor a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ sorok lineáris kombinációja, az \underline{a}_i sorban szereplő együtthatókkal.

Példa:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak $\underline{v}^T \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$. Ekkor

(1) az AB szorzat j -dik oszlopa az $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat a \underline{b}^j oszlop tartalmazza.

(2) Hasonlóan, az i -dik sor a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ sorok lineáris kombinációja, az \underline{a}_i sorban szereplő együtthatókkal.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak $\underline{v}^T \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$. Ekkor

(1) az AB szorzat j -dik oszlopa az $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat a \underline{b}^j oszlop tartalmazza.

(2) Hasonlóan, az i -dik sor a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ sorok lineáris kombinációja, az \underline{a}_i sorban szereplő együtthatókkal.

(3) Ha a C mátrix minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja, akkor C előáll AB alakban. Ha a C mátrix sorai az A sorainak lin.komb-i, akkor C előáll $C = BA$ alakban.

A mátrixszorzás egy különös tulajdonsága

Def: Az $n \times n$ méretű **egységmátrix** $I_n = E_n = (\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$, ahol $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ az \mathbb{R}^n standard bázisa.

Megf: Legyen A tetsz. $n \times k$ méretű mátrix. Ekkor

(1) tetsz. $\underline{e}_j \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^n$ stand. bázisvektorok esetén $A \cdot \underline{e}_j$ az A mátrix j -dik oszlopa, $\underline{e}_i^T \cdot A$ pedig az A mátrix i -dik sora.

(2) $A \cdot I_k = I_n \cdot A = A$

(3) Ha $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor $A \cdot \underline{u}$ az A oszlopainak $\underline{v}^T \cdot A$ pedig az A sorainak lin.komb-ja.

Köv: Tfh A oszlopai $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ és B sorai $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$. Ekkor

(1) az AB szorzat j -dik oszlopa az $\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^k$ oszlopok lineáris kombinációja, az együtthatókat a \underline{b}^j oszlop tartalmazza.

(2) Hasonlóan, az i -dik sor a $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ sorok lineáris kombinációja, az \underline{a}_i sorban szereplő együtthatókkal.

(3) Ha a C mátrix minden oszlopa az A oszlopainak lin.komb-ja, akkor C előáll AB alakban. Ha a C mátrix sorai az A sorainak lin.komb-i, akkor C előáll $C = BA$ alakban.

Köv: Ha A' ESÁ-okkal kapható A -ból, akkor $A' = BA$ alakú.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$(1) A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v} \quad \text{ill.} \quad (2) A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v} \text{ teljesül.}$$

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Példa: Lin.lekép \mathbb{R}^2 -ből \mathbb{R}^2 -be (a szokásos helyvektorokon) az origóra tükrözés, az origó körüli forgatás, az x tengelyre vetítés, vagy egy origón átmenő egyenesre tükrözés. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés, ha pl. az sík minden (x, y) pontjához a tér $(2x, 0, y/2)$ pontját rendeljük.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Megf: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ esetén az A -val történő balszorzás lin.lekép-t definiál \mathbb{R}^k -ből \mathbb{R}^n -be.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Megf: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ esetén az A -val történő balszorzás lin.lekép-t definiál \mathbb{R}^k -ből \mathbb{R}^n -be.

Kínzó kérdés: Minden lin.lekép megadható mátrixszorzással?

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Megf: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ esetén az A -val történő balszorzás lin.lekép-t definiál \mathbb{R}^k -ből \mathbb{R}^n -be.

Kínzó kérdés: Minden lin.lekép megadható mátrixszorzással?

Megnyugtató válasz: Igen.

Lineáris leképezések

Megf: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ olyan $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ leképezés, amire $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $A(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot A\underline{v}$ ill. (2) $A(\underline{u} + \underline{v}) = A\underline{u} + A\underline{v}$ teljesül.

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Megf: Tetsz. $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ esetén az A -val történő balszorzás lin.lekép-t definiál \mathbb{R}^k -ből \mathbb{R}^n -be.

Kínzó kérdés: Minden lin.lekép megadható mátrixszorzással?

Megnyugtató válasz: Igen. Ezt fogjuk most igazolni.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$, $V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lin.lekép \iff f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lin.lekép \iff f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Biz: \Rightarrow : Mivel f additív és homogén, ezért

$$f(\lambda_1 \underline{u}_1 + \dots + \lambda_k \underline{u}_k) = f(\lambda_1 \underline{u}_1) + \dots + f(\lambda_k \underline{u}_k) = \lambda_1 f(\underline{u}_1) + \dots + \lambda_k f(\underline{u}_k),$$

azaz f zárt a lin.komb-ra.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lin.lekép \iff f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Biz: \Rightarrow : Mivel f additív és homogén, ezért

$$f(\lambda_1 \underline{u}_1 + \dots + \lambda_k \underline{u}_k) = f(\lambda_1 \underline{u}_1) + \dots + f(\lambda_k \underline{u}_k) = \lambda_1 f(\underline{u}_1) + \dots + \lambda_k f(\underline{u}_k),$$

azaz f zárt a lin.komb-ra.

\Leftarrow : Ha f zárt a lin.komb-ra, akkor $f(\lambda \underline{u}) = \lambda f(\underline{u})$, hisz $\lambda \underline{u}$ az u lin.komb-ja, továbbá

$f(\underline{u} + \underline{v}) = f(1\underline{u} + 1\underline{v}) = 1f(\underline{u}) + 1f(\underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$, tehát f homogén és additív, más szóval f lin.lekép. □

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$, $V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lin.lekép \iff f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lin.lekép \iff f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.lekép-t.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lin.lekép \iff f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.lekép-t.

Annak az igazolásához, hogy minden f lin.lekép előáll mátrixszal történő balszorzással csupán azt kell megmutatni, hogy van olyan $[f]$ mátrix, amire $f(\underline{b}_i) = [f]\underline{b}_i$ teljesül minden \underline{b}_i báziselemre.

Ekkor ugyanis az $[f]$ -fel való balszorzás lin.lekép, továbbá a fenti Következmény miatt $f(\underline{v}) = [f]\underline{v}$, azaz minden vektor f szerinti képe megkapható az $[f]$ mátrixszal történő balszorzással.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lin.lekép \iff f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.lekép-t.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lin.lekép \iff f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.lekép-t.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n, f : U \rightarrow V$ lin.lekép $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $[f] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $[f] \underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lin.lekép \iff f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.lekép-t.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n, f : U \rightarrow V$ lin.lekép $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $[f] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $[f]\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Biz: Legyen $B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m)$. B oszlopai lin.ftn-ek, ezért a B ESÁ-okkal RLA mátrixszá transzformált alakja $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m)$, azaz I_m áll az RLA mátrix tetején. Minden m oszlopból álló mátrix, így $F = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m)$ is megkapható I_m sorainak lin.komb-jaként.

Tehát F sorai előállnak B sorainak lin.komb-jaként, vagyis van olyan $[f]$ mátrix, amire $[f]B = F$, azaz $[f]\underline{b}_i = \underline{v}_i \quad \forall i$. □

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lin.lekép \iff f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.lekép-t.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n, f : U \rightarrow V$ lin.lekép $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $[f] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $[f] \underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lin.lekép \iff f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.lekép-t.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n, f : U \rightarrow V$ lin.lekép $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $[f] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $[f]\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Köv: Tetsz. $f : U \rightarrow V$ lin.lekép esetén $[f]\underline{u} = f(\underline{u})$ teljesül a Lemmában definiált $[f]$ mátrixra $\forall \underline{u} \in U$ esetén, azaz minden lineáris leképezés előáll mátrixszal történő balszorzással.

Lineáris leképezések

Def: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k$ és $V \leq \mathbb{R}^n$. Az $f : U \rightarrow V$ **lineáris leképezés**, ha homogén és additív, azaz ha $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v})$ ill. (2) $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$ teljesül.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n$. Ekkor $f : U \rightarrow V$ lin.lekép \iff f zárt a lin.komb-ra, azaz $f(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{u}_i) \quad \forall \lambda_i, \underline{u}_i$.

Köv: Ha $f : U \rightarrow V$ lin.lekép, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m\}$ az U bázisa és $\underline{u} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \underline{b}_i$, akkor $f(\underline{u}) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i f(\underline{b}_i)$, azaz a báziselemeken felvett értékek egyértelműen meghatározzák a lin.lekép-t.

Lemma: Tfh $U \leq \mathbb{R}^k, V \leq \mathbb{R}^n, f : U \rightarrow V$ lin.lekép $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m$ az U bázisa és $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \in V$ tetsz. vektorok. Ekkor van olyan $[f] \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix, amire $[f]\underline{b}_i = \underline{v}_i$ teljesül $\forall 1 \leq i \leq m$ esetén.

Köv: Tetsz. $f : U \rightarrow V$ lin.lekép esetén $[f]\underline{u} = f(\underline{u})$ teljesül a Lemmában definiált $[f]$ mátrixra $\forall \underline{u} \in U$ esetén, azaz minden lineáris leképezés előáll mátrixszal történő balszorzással.

Azt fogjuk most megfigyelni, hogyan is kell az f lineáris leképezés $[f]$ mátrixát kiszámítani a báziselemek képeinek segítségével.

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Biz: $A \cdot \underline{e}_i$ az A i -dik oszlopa, vagyis $\underline{a}_i \ \forall i$. □

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f **lineáris leképezés mátrixa**.

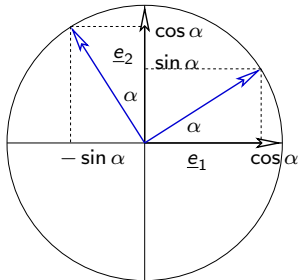
Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás \mathbb{R}^2 -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.



Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás \mathbb{R}^2 -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás \mathbb{R}^2 -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás \mathbb{R}^2 -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Biz: Először igazoljuk $g \circ f$ linearitását.

$$g(f(\lambda \underline{u})) = g(\lambda f(\underline{u})) = \lambda g(f(\underline{u})), \text{ ill.}$$

$$g(f(\underline{u} + \underline{v})) = g(f(\underline{u}) + f(\underline{v})) = g(f(\underline{u})) + g(f(\underline{v})). \text{ Tehát } g \circ f \text{ csakugyan lineáris leképezés.}$$

Végül a kompozíciómátrixról szóló képlet helyességét bizonyítjuk.

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás \mathbb{R}^2 -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Biz:

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás \mathbb{R}^2 -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Biz: A tanultak szerint a $[g \circ f]$ i -dik oszlopa $g(f(\underline{e}_i)) = [g]([f]\underline{e}_i)$. Láttuk, hogy $[f]\underline{e}_i$ az $[f]$ i -dik oszlopa, így $[g]([f]\underline{e}_i)$ a $[g]$ mátrix szorzata $[f]$ i -dik oszlopával. Ez pedig nem más, mint az $[g][f]$ szorzatmátrix i -dik oszlopa. Ezek szerint $[g \circ f] = [g][f]$. \square

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás \mathbb{R}^2 -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás \mathbb{R}^2 -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás \mathbb{R}^2 -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Biz: Legyen f, g és h az A, B ill. C mátrixokhoz tartozó lin.lekép. Ekkor $A(BC)$ az $f \circ (g \circ h)$, $(AB)C$ pedig az $(f \circ g) \circ h$ leképezés mátrixa. Márpedig $f \circ (g \circ h)(\underline{v}) = f(g(h(\underline{v}))) = (f \circ g) \circ h(\underline{v})$ miatt e két leképezés megegyezik, így a mátrixaik is azonosak. \square

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás \mathbb{R}^2 -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Lineáris leképezés mátrixa

Megf: Tfh $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k \in \mathbb{R}^n$ és $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k)$. Ekkor a $\underline{v} \mapsto A\underline{v}$ lin.lekép az $\underline{e}_i \in \mathbb{R}^k$ stand. bázisektort \underline{a}_i -be viszi ($\forall 1 \leq i \leq k$).

Köv: Tfh $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ lin.lekép. Legyen $[f] = (f(\underline{e}_1), \dots, f(\underline{e}_k))$. Ekkor $[f]\underline{v} = f(\underline{v})$ teljesül $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^k$ esetén.

Def: A fenti $[f]$ mátrix az f **lineáris leképezés mátrixa**.

Példa: Legyen f_α az origó körüli α szögű elforgatás \mathbb{R}^2 -ben. Ekkor $f_\alpha(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ill. $f_\alpha(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, így $[f_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma: Tfh $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ és $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ lin.lekép-ek. Ekkor $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ is lin.lekép, ahol $(g \circ f)(\underline{v}) = g(f(\underline{v}))$ és $[g \circ f] = [g][f]$.

Köv: Ha értelmesek a műveletek, akkor $A(BC) = (AB)C$.

Köv: A fenti példában szereplő elforgatásokra igaz, hogy

$$f_{\alpha+\beta} = f_\alpha \circ f_\beta, \text{ így } \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = [f_{\alpha+\beta}] = [f_\alpha][f_\beta] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}$$

Így aztán $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ ill.

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ adódik.