

A számítástudomány alapjai, Hatvan

Négyzetes mátrix determinánása

2022. november 19.

Permutációk inverziószáma

Def: n elem permutációján egy olyan n hosszú számsorozatot értünk ami az $1, 2, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az ilyen permutációk halmaza S_n . Egy permutáció az $1, 2, \dots, n$ számok egy összekverése.

Permutációk inverziószáma

Def: n elem permutációján egy olyan n hosszú számsorozatot értünk ami az $1, 2, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az ilyen permutációk halmaza S_n . Egy permutáció az $1, 2, \dots, n$ számok egy összekverése.

Megf: Egy n hosszú permutáció leírható egy $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ függvénnyel, ahol $\sigma(i)$ az i elem permutációjában elfoglalt pozícióját adja meg.

Példa: A 38571624 permutációhoz az alábbi függvényértékek tartoznak:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(i)$	5	7	1	8	3	6	4	2

Permutációk inverziószáma

Def: n elem permutációján egy olyan n hosszú számsorozatot értünk ami az $1, 2, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az ilyen permutációk halmaza S_n . Egy permutáció az $1, 2, \dots, n$ számok egy összekverése.

Megf: Egy n hosszú permutáció leírható egy $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ függvénnyel, ahol $\sigma(i)$ az i elem permutációjában elfoglalt pozícióját adja meg.

Permutációk inverziószáma

Def: n elem permutációján egy olyan n hosszú számsorozatot értünk ami az $1, 2, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az ilyen permutációk halmaza S_n . Egy permutáció az $1, 2, \dots, n$ számok egy összekverése.

Megf: Egy n hosszú permutáció leírható egy $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ függvénnyel, ahol $\sigma(i)$ az i elem permutációjában elfoglalt pozícióját adja meg.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár **inverzióban áll**, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$ -val jelölt **inverziószáma** a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Permutációk inverziószáma

Def: n elem permutációján egy olyan n hosszú számsorozatot értünk ami az $1, 2, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az ilyen permutációk halmaza S_n . Egy permutáció az $1, 2, \dots, n$ számok egy összekverése.

Megf: Egy n hosszú permutáció leírható egy $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ függvénnyel, ahol $\sigma(i)$ az i elem permutációjában elfoglalt pozícióját adja meg.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár **inverzióban áll**, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$ -val jelölt **inverziószáma** a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Példa: A $\sigma = 38571624$ permutáció inverziószáma $I(\sigma) = 2 + 6 + 3 + 4 + 0 + 2 + 0 + 0 = 17$.

Permutációk inverziószáma

Def: n elem permutációján egy olyan n hosszú számsorozatot értünk ami az $1, 2, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az ilyen permutációk halmaza S_n . Egy permutáció az $1, 2, \dots, n$ számok egy összekverése.

Megf: Egy n hosszú permutáció leírható egy $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ függvénnyel, ahol $\sigma(i)$ az i elem permutációjában elfoglalt pozícióját adja meg.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár **inverzióban áll**, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$ -val jelölt **inverziószáma** a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Permutációk inverziószáma

Def: n elem permutációján egy olyan n hosszú számsorozatot értünk ami az $1, 2, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az ilyen permutációk halmaza S_n . Egy permutáció az $1, 2, \dots, n$ számok egy összekverése.

Megf: Egy n hosszú permutáció leírható egy $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ függvényvel, ahol $\sigma(i)$ az i elem permutációjában elfoglalt pozícióját adja meg.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár **inverzióban áll**, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$ -val jelölt **inverziószáma** a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Megf: (1) Szomszédos elemek cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz elem cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Permutációk inverziószáma

Def: n elem permutációján egy olyan n hosszú számsorozatot értünk ami az $1, 2, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az ilyen permutációk halmaza S_n . Egy permutáció az $1, 2, \dots, n$ számok egy összekverése.

Megf: Egy n hosszú permutáció leírható egy $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ függvénnyel, ahol $\sigma(i)$ az i elem permutációjában elfoglalt pozícióját adja meg.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár **inverzióban áll**, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$ -val jelölt **inverziószáma** a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Megf: (1) Szomszédos elemek cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz elem cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Biz: (1) A két felcserélt elem viszonya megfordul, minden más pár ugyanolyan marad, mint korábban volt.

Permutációk inverziószáma

Def: n elem permutációján egy olyan n hosszú számsorozatot értünk ami az $1, 2, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az ilyen permutációk halmaza S_n . Egy permutáció az $1, 2, \dots, n$ számok egy összekverése.

Megf: Egy n hosszú permutáció leírható egy $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ függvénnyel, ahol $\sigma(i)$ az i elem permutációjában elfoglalt pozícióját adja meg.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár **inverzióban áll**, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$ -val jelölt **inverziószáma** a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Megf: (1) Szomszédos elemek cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz elem cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Biz:

Permutációk inverziószáma

Def: n elem permutációján egy olyan n hosszú számsorozatot értünk ami az $1, 2, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az ilyen permutációk halmaza S_n . Egy permutáció az $1, 2, \dots, n$ számok egy összekverése.

Megf: Egy n hosszú permutáció leírható egy $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ függvénnyel, ahol $\sigma(i)$ az i elem permutációjában elfoglalt pozícióját adja meg.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár **inverzióban áll**, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$ -val jelölt **inverziószáma** a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Megf: (1) Szomszédos elemek cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz elem cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Biz: (2) Ha a felcserélt elemek között k másik elem van, akkor ugyanez a csere megkapható $2k + 1$ szomszédos elempár cseréjének egymásutánjaként. Az inverziószám így $(2k + 1)$ -szer változik 1-gyel, ezért összességében páratlannal változik.



Permutációk inverziószáma

Def: n elem permutációján egy olyan n hosszú számsorozatot értünk ami az $1, 2, \dots, n$ számok mindegyikét pontosan egyszer tartalmazza. Az ilyen permutációk halmaza S_n . Egy permutáció az $1, 2, \dots, n$ számok egy összekverése.

Megf: Egy n hosszú permutáció leírható egy $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ függvénnyel, ahol $\sigma(i)$ az i elem permutációjában elfoglalt pozícióját adja meg.

Def: A $\sigma \in S_n$ permutációban az (i, j) pár **inverzióban áll**, ha i és j nagyságviszonya fordított $\sigma(i)$ és $\sigma(j)$ nagyságviszonyához képest. A $\sigma \in S_n$ permutáció $I(\sigma)$ -val jelölt **inverziószáma** a σ szerint inverzióban álló párok száma.

Megf: (1) Szomszédos elemek cseréjekor $I(\sigma)$ 1-gyel változik.
(2) Két tetsz elem cseréjekor $I(\sigma)$ mindig páratlannal változik.

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai a standard bázisvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek **bástyaelhelyezést** alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai a standard bázisvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek **bástyaelhelyezést** alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll. Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció. Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai a standard bázisvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek **bástyaelhelyezést** alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.

Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?

Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai a standard bázisvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek **bástyaelhelyezést** alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.

Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?

Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai a standard bázisvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek **bástyaelhelyezést** alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.

Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?

Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.

Köv: Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számával.

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai a standard bázisvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek **bástyaelhelyezést** alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.

Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?

Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.

Köv: Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számával.

Példa:

						○
		○				
○						
	○			○		
			○			
						○
	○					

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai a standard bázisvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek **bástyaelhelyezést** alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.

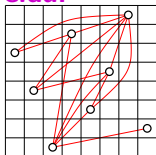
Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?

Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.

Köv: Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számával.

Példa:



Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai a standard bázisvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek **bástyaelhelyezést** alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.

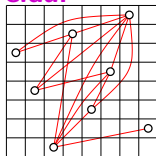
Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?

Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.

Köv: Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számával.

Példa:



$$I(\sigma) = 14.$$

Bástyaelhelyezések

Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ tetsz. sorrendjéhez tekintsük azt az $n \times n$ méretű mátrixot, aminek az oszlopai a standard bázisvektorok az adott sorrendben. A mátrixbeli 1-esek **bástyaelhelyezést** alkotnak: minden sorban és minden oszlopban pontosan egy db 1-es áll.

Legyen σ a sorrendhez tartozó permutáció.

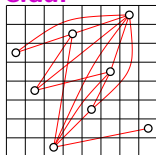
Mit jelent, hogy az (i, j) pár σ szerint inverzióban áll?

Azt, hogy e_i és e_j közül a bal oldaliban az 1-es lejjebb van.

Az inverzióban álló vektorpárok tehát pontosan azok, amelyekben az 1-esek ÉK-DNy pozícióban állnak egymáshoz képest.

Köv: Az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n)$ egy sorrendjéhez tartozó σ permutáció inverziószáma megegyezik megfelelő bástyaelhelyezésben ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok számával.

Példa:



$I(\sigma) = 14.$ **Lássuk végre a determinánst!**

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| =$
 $= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme.
A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme. A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

Példa: ill. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ill.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme. A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

Példa: ill. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ill.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros/bástyaelhelyezésnek megfelelő permutáció inverziószáma páros.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme. A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

Példa: ill. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ill.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástyaelhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros/bástyaelhelyezésnek megfelelő permutáció inverziószáma páros.

(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másféleképpen nincs.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme. A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

Példa: ill. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ill.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + cdh + bfg - ceg$$

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástyaelhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros/bástyaelhelyezésnek megfelelő permutáció inverziószáma páros.

(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másféleképpen nincs.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme. A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros/bástyaelhelyezésnek megfelelő permutáció inverziószáma páros.

(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másféleképpen nincs.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **transzponáltja** az az $A^T \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, aminek az i -dik sor j -dik eleme az A mátrix j -dik sorának i -dik eleme $\forall i, j$.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme. A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros/bástyaelhelyezésnek megfelelő permutáció inverziószáma páros.

(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másféleképpen nincs.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **transzponáltja** az az $A^T \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, aminek az i -dik sor j -dik eleme az A mátrix j -dik sorának i -dik eleme $\forall i, j$.

Példa:
$$\begin{pmatrix} 42 & 4^2 & 4, 2 \\ 42^{42} & 42! & \sqrt[42]{\sqrt[42]{42}} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 42 & 42^{42} \\ 4^2 & 42! \\ 4, 2 & \sqrt[42]{\sqrt[42]{42}} \end{pmatrix}$$

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme. A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros/bástyaelhelyezésnek megfelelő permutáció inverziószáma páros.

(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másféleképpen nincs.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **transzponáltja** az az $A^T \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, aminek az i -dik sor j -dik eleme az A mátrix j -dik sorának i -dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^T|$.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme. A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros/bástyaelhelyezésnek megfelelő permutáció inverziószáma páros.

(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másféleképpen nincs.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **transzponáltja** az az $A^T \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, aminek az i -dik sor j -dik eleme az A mátrix j -dik sorának i -dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^T|$.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme. A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros/bástyaelhelyezésnek megfelelő permutáció inverziószáma páros.

(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másféleképpen nincs.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **transzponáltja** az az $A^T \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, aminek az i -dik sor j -dik eleme az A mátrix j -dik sorának i -dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^T|$.

Biz: Az A mátrix bármely bástyaelhelyezését meghatározó elemek A^T -ban is bástyaelhelyezést alkotnak. Két bástya pontosan akkor alkot ÉK-DNy párt A -ban, ha A^T -ban is ÉK-DNy-i párt alkotnak. Ezért $\det(A)$ -ban ugyanazokat a kifejtési tagokat (ugyazzal az előjellel) kell összeadni, mint $\det(A^T)$ -ban.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme. A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros/bástyaelhelyezésnek megfelelő permutáció inverziószáma páros.

(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másféleképpen nincs.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **transzponáltja** az az $A^T \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, aminek az i -dik sor j -dik eleme az A mátrix j -dik sorának i -dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^T|$.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme. A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

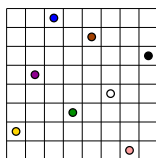
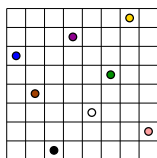
Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros/bástyaelhelyezésnek megfelelő permutáció inverziószáma páros.

(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másféleképpen nincs.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **transzponáltja** az az $A^T \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, aminek az i -dik sor j -dik eleme az A mátrix j -dik sorának i -dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^T|$.

Példa:



A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme. A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

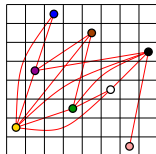
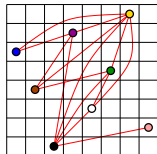
Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros/bástyaelhelyezésnek megfelelő permutáció inverziószáma páros.

(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másféleképpen nincs.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **transzponáltja** az az $A^T \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, aminek az i -dik sor j -dik eleme az A mátrix j -dik sorának i -dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^T|$.

Példa:



A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme. A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseihez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros/bástyaelhelyezésnek megfelelő permutáció inverziószáma páros.

(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másféleképpen nincs.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **transzponáltja** az az $A^T \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, aminek az i -dik sor j -dik eleme az A mátrix j -dik sorának i -dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^T|$.

Köv: Ha egy tulajdonság általában igaz a determináns oszlopaira, akkor a megfelelő tulajdonság a determináns soraira is teljesül.

A determináns

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **négyzetes** mátrix **determinánsa** $\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$, ahol $a_{i,j}$ az i -dik sornak j -dik eleme. A $(-1)^{l(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ szorzat a determináns **kifejtési tagja**.

Megj: (1) Az A mátrix determinánsa tehát az A bástya-elhelyezéseikhez tartozó szorzatok előjeles összege, ahol az előjel akkor pozitív, ha az ÉK-DNy pozícióban álló bástyapárok száma páros/bástyaelhelyezésnek megfelelő permutáció inverziószáma páros.

(2) Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, másféleképpen nincs.

Def: Az $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix **transzponáltja** az az $A^T \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrix, aminek az i -dik sor j -dik eleme az A mátrix j -dik sorának i -dik eleme $\forall i, j$.

Tétel: Ha A négyzetes mátrix, akkor $|A| = |A^T|$.

Köv: Ha egy tulajdonság általában igaz a determináns oszlopaira, akkor a megfelelő tulajdonság a determináns soraira is teljesül.

Megj: Egy $n \times n$ determináns kiszámításához $n!$ kifejtési tagot kell összegezni. Ez rengeteg munka. Gyorsabb módszer adódik, ha megfigyeljük, hogy az ESÁ-ok hogyan változtatják a determinánst.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

Biz: A bal oldali determináns minden kifejtési tagjának az i -dik oszlopbeli tényezője a \underline{u}_i és \underline{v} egy koordinátájának összege. Ha felbontjuk a zárójelet, a kifejtési tagból két szorzat lesz. Ezek a szorzatok pedig épp a jobb oldali determinánsok kifejtési tagjai. □

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

Biz: A bal oldali determináns minden kifejtési tagjából kiemelve λ -t épp a jobb oldalon szereplő determináns kifejtési tagjait kapjuk. □

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

Biz: Mivel $\underline{u}_i = \underline{0} = 0 \cdot \underline{u}_i$, ezért (2) miatt $|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, 0 \cdot \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = 0 \cdot |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = 0$. \square

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) \quad |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \quad \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) \quad |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

Biz: Minden kifejtési tagot úgy kapunk meg, hogy az

$\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n$ vektorok mindegyikének kiválasztjuk egy-egy különböző koordinátáját, és ezeket összeszorozzuk. Ezért a két determináns kifejtési tagjaiban ugyanazok a szorzatok szerepelnek. Az ugyanazon szorzathoz tartozó kifejtési tagok egy oszlopcserével kaphatók egymásból (a nekik megfelelő permutációk elemcserével kaphatóak, ezért a paritásuk ellentétes), így az előjelük ellentétes lesz. Ezért oszlopcsere hatására a determináns értéke (-1) -szeresre változik. □

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) \quad |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \quad \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) \quad |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Biz: A két egyforma oszlopot felcserélve a mátrix nem változik, így a determináns sem. (4) miatt viszont a determináns (-1) -szeres lesz: $|A| = -|A|$, vagyis $|A| = 0$. □

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz:

(1) Az előző állítás (2) részét alkalmazzuk az A^T transzponáltra.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz:

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz:

(2) Az előző állítás (4) részét alkalmazzuk az A^T transzponáltra.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz:

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

Biz: (3) Az előző állítás (1) részét alkalmazva a transzponáltra a lecserélt sorú determináns megkapható $|A| + |A'|$ összegként, ahol A' -nek két egyforma sora van. A korábban látottak és az előző állítás (3) része miatt $|A'| = |(A')^T| = 0$. □

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

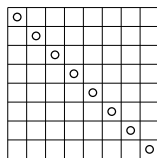
Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix **főátlója** az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik.



A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sor λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix **főátlója** az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix **főátlója** az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A **felső háromszögmátrix**.

?	?	?	?	?	?
0	?	?	?	?	?
0	0	?	?	?	?
0	0	0	?	?	?
0	0	0	0	?	?
0	0	0	0	0	?

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sor λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix **főátlója** az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A **felső háromszögmátrix**.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sor λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix **főátlója** az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0 -k állnak, akkor A **felső háromszögmátrix**.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sor λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix **főátlója** az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A **felső háromszögmátrix**.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.

Biz: Ha egy sor v_1 -e a főátlótól balra van, akkor a felette levő soré is. Az első soré nem ilyen, ezért minden v_1 a főátlón vagy attól jobbra áll, így a főátló alatt minden elem 0.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sor λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix **főátlója** az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0 -k állnak, akkor A **felső háromszögmátrix**.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sort λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix **főátlója** az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A **felső háromszögmátrix**.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.

(2) F.háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemei szorzata.

A determináns további fontos tulajdonságai

Állítás: Ha $A = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, akkor (1)

$$|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i + \underline{v}, \dots, \underline{u}_n| = |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| + |\underline{u}_1, \dots, \underline{v}, \dots, \underline{u}_n|,$$

$$(2) |\underline{u}_1, \dots, \lambda \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = \lambda |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(3) \underline{u}_i = \underline{0} \Rightarrow |A| = 0,$$

$$(4) |\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n| = -|\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_j, \dots, \underline{u}_i, \dots, \underline{u}_n|.$$

(5) Ha A -nak van két egyforma oszlopa, akkor $|A| = 0$.

Köv: ESÁ hatása négyzetes A mátrix determinánsára:

(1) Sor λ -val szorozva a determináns λ -szorosra változik.

(2) Sorcsere hatására a determináns ellentettjére változik.

(3) A j -dik sort kicserélve az i -dik és j -dik sor összegére a determináns nem változik.

Def: Az A négyzetes mátrix **főátlója** az A mindazon elemei, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik. Ha A főátlója alatt csak 0-k állnak, akkor A **felső háromszögmátrix**.

Megf: (1) Minden LA négyzetes mátrix felső háromszögmátrix.

(2) F.háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemei szorzata.

Biz: Minden kif.tag tartalmaz 0 tényezőt, kivéve a főátlóbeliek szorzata, aminek az előjele pozitív.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$
$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix}$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$
$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix}$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$
$$-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix}$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right| = \\ & - \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{array} \right| = \\ & \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{array} \right| \end{aligned}$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$
$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 42 = 42$$

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$
$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 42 = 42$$

Megj: A determináns kiszámításához képezhetünk LA mátrixot. Ehhez nem kötelező Gauss-eliminációt használni, bármilyen ESÁ-sal dolgozhatunk a cél érdekében. Nem muszáj v1-ket sem gyártani: elég a felső háromszögmátrixig (vagy csupa0 sorig) eljutni.

A determináns kiszámolása ESÁ-okkal

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$
$$- \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 6 & 1 & -16 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -5 & -58 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 42 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 42 = 42$$

Megj: A determináns kiszámításához képezhetünk LA mátrixot. Ehhez nem kötelező Gauss-eliminációt használni, bármilyen ESÁ-sal dolgozhatunk a cél érdekében. Nem muszáj v1-ket sem gyártani: elég a felső háromszögmátrixig (vagy csupa0 sorig) eljutni. Sőt: mindent, amit a sorokkal megtehetünk, azt hasonló módon az oszlopokkal is elvégezhetjük. Ez néha célszerűbb lehet, mint kizárólag csak ESÁ-ok alkalmazása.

Mire jó a determináns?

Láttuk, hogy egy n egyenletből álló n ismeretlenes egyenletrendszerrel az alábbi három eshetőség fordulhat elő:

- ▶ Pontosan egy megoldás van.
- ▶ Végtelen sok megoldás van.
- ▶ Nincs megoldás.

Látni fogjuk később, hogy ha az egyenletrendszer együtthatómátrixának (a konstansokkal most nem foglalkozunk) nem 0 a determinánsa, akkor és csak akkor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Tehát a determináns determinálja az egyenletrendszer viselkedését.

Ezen túlmenően a determináns segítségével számíthatók ki egy csomó dolog, például:

- ▶ Paralelogramma területe
- ▶ Paralelepipedon térfogata
- ▶ Vektoriális szorzat

A kifejtési tétel

Megf: Tfh \underline{e}_j az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix j -dik oszlopa, továbbá, hogy A első $i - 1$ sora az első $j - 1$ ill. utolsó $n - j$ oszloppal az A_1 ill. A_2 , az utolsó $n - i$ sor az első $j - 1$ ill. utolsó $n - j$ oszloppal pedig az A_3 ill. A_4 mátrixokat alkotja. Ekkor $j - 1$ sor- és $i - 1$ oszlopcserével adódik:

$$\left| \begin{array}{c} 0 \\ A_1 : A_2 \\ \dot{0} \\ ??? \ 1 \ ??? \\ 0 \\ A_3 : A_4 \\ \dot{0} \end{array} \right|$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i -dik sorának j -dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i -dik sor és j -dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$ -szerese.

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i -dik sorának j -dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i -dik sor és j -dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$ -szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j -dik oszlop szerinti kifejtés):

$$|A| = \left| A_1, \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}, A_2 \right| = \sum_{i=1}^n \left| A_1, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{i,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 \right| =$$

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} \left| A_1, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 \right| = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$$

□

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i -dik sorának j -dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i -dik sor és j -dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$ -szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j -dik oszlop szerinti kifejtés):

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j}$$



A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i -dik sorának j -dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ **előjeles aldeteminánása** az i -dik sor és j -dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$ -szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j -dik oszlop szerinti kifejtés):

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j} \quad \square$$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a determináns így is kiszámítható.

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i -dik sorának j -dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i -dik sor és j -dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$ -szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j -dik oszlop szerinti kifejtés):

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j} \quad \square$$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a determináns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i -dik sorának j -dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i -dik sor és j -dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$ -szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j -dik oszlop szerinti kifejtés):

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j} \quad \square$$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a determináns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i -dik sorának j -dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i -dik sor és j -dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$ -szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j -dik oszlop szerinti kifejtés):

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j} \quad \square$$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a determináns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i -dik sorának j -dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i -dik sor és j -dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$ -szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j -dik oszlop szerinti kifejtés):

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j} \quad \square$$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a determináns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} +$$
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot 7 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

A kifejtési tétel

Def: Az A mátrix i -dik sorának j -dik eleméhez tartozó $A_{i,j}$ előjeles aldeterminánsa az i -dik sor és j -dik oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsának $(-1)^{i+j}$ -szerese.

Determinánsok kifejtési tétele (j -dik oszlop szerinti kifejtés):

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{i,j} A_{i,j} \quad \square$$

Értelemszerűen definiálható a sor szerinti kifejtés is, és a transzponáltról tanultak miatt a determináns így is kiszámítható.

Példa:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} +$$
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot 7 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= -2(9-11) + 14(3-1) - (6-2) + (9-11) - (6-22) = 4 + 28 - 4 - 2 + 16 = 42$$