Euler-séta, -körséta, Hamilton-kör, -út

Papp László

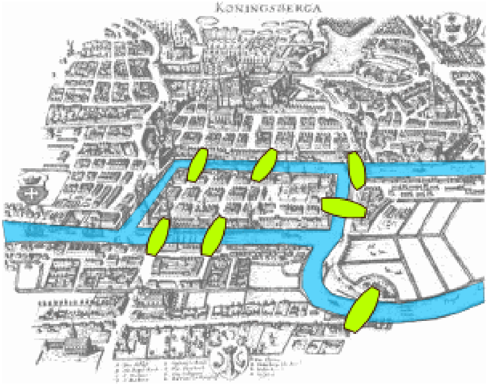
BME

2022. október 8.

Königsberg 1255-1945, Kaliningrad 1945-

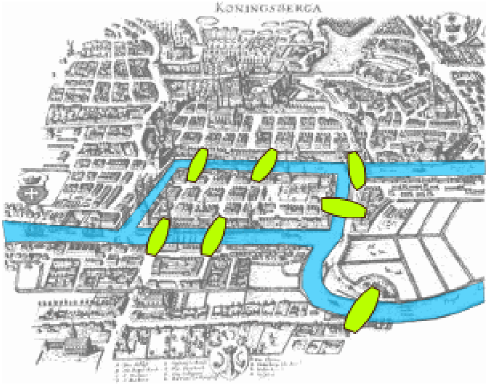
Feladat 18. század eleje

Lehet-e olyan sétát tenni a 18. századi Königsbergben ami minden hídon pontosan egyszer megy át és ugyan oda érkezünk ahonnan elindultunk?



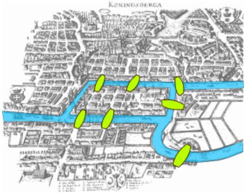
Feladat 18. század eleje

Lehet-e olyan sétát tenni a 18. századi Königsbergben ami minden hídon pontosan egyszer megy át és ugyan oda érkezünk ahonnan elindultunk?

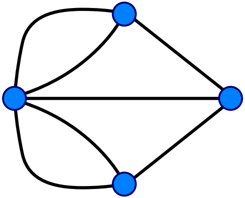


Leonhard Euler (1707 Bázel - 1783 Szentpétervár) válasza: Nem.

Gráfelméleti modell



$\Longrightarrow$



Gráfelméleti kérdés: Van-e olyan kör-séta a gráfban amely minden élet pontosan egyszer érint?

Definíció

Egy G gráf **Euler-körsétája** egy olyan séta amely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza és ugyan abban a pontban ér véget mint amelyikben kezdődik.
Egy G gráf **Euler-sétája** egy olyan séta amely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza

Mikor van Euler-körséta illetve Euler-séta?

Tétel

Ha G összefüggő véges gráf akkor:

- G-ben van Euler-körséta $\iff$ G minden csúcsának a foka páros.
- G-ben van Euler-séta $\iff$ G páratlan fokú csúcsainak a száma 0 vagy 2.

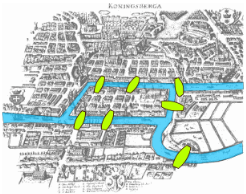
Mikor van Euler-körséta illetve Euler-séta?

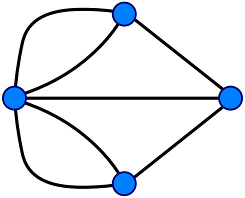
Tétel

Ha G összefüggő véges gráf akkor:

- G-ben van Euler-körséta $\iff$ G minden csúcsának a foka páros.
- G-ben van Euler-séta $\iff$ G páratlan fokú csúcsainak a száma 0 vagy 2.

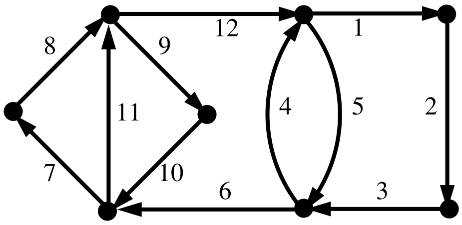
Következmény: A königsbergi hidak gráfjában 4 páratlan fokú csúcs van, így se Euler-körsétaja, se Euler-sétaja nincsen. Tehát nem lehet megcsinálni azt amit a porosz polgárok szerettek volna.





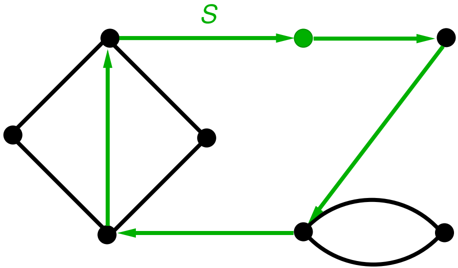
Bizonyítás (Euler-körsétás rész)

$\Longrightarrow$: Ha a G-nek van Euler-körsétája, akkor ezen végigmenve minden egyes csúcsba pontosan annyiszor lépünk be mint ahányszor kilépünk és minden a csúcsra illeszkedő élet használunk. Emiatt tetszőleges csúcsra a rá illeszkedő élek száma páros.



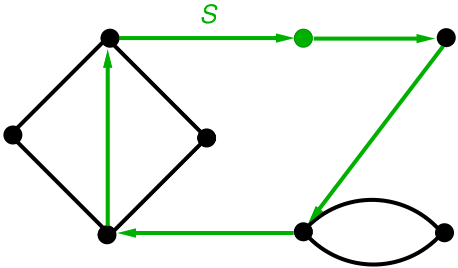
$\Longleftarrow$: Csúcsszámra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy minden n csúcsnál kevesebb csúccsal rendelkező összefüggő gráfra igaz a tétel. Tekintsünk egy n csúcsút.

Bizonyítás (Euler-körsétás rész)



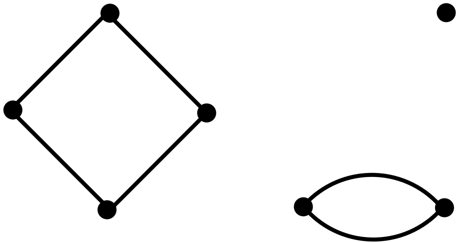
Induljunk ki egy csúcsból és éleken lépkedve építsünk egy S sétát addig amíg el nem akadunk, azaz amikor már nincs ki futó még fel nem használt él abból a csúcsból ahol vagyunk.

Bizonyítás (Euler-körsétás rész)



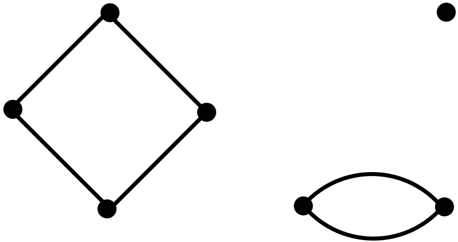
Induljunk ki egy csúcsból és éleken lépkedve építsünk egy S sétát addig amíg el nem akadunk, azaz amikor már nincs ki futó még fel nem használt él abból a csúcsból ahol vagyunk. Mivel minden csúcs foka páros ezért csak a kiinduló csúcsban akadhatunk el, így tehát egy S zárt körsétát kapunk. S a kiinduló csúcsra illeszkedő összes élet tartalmazza.

Bizonyítás (Euler-körsétás rész)



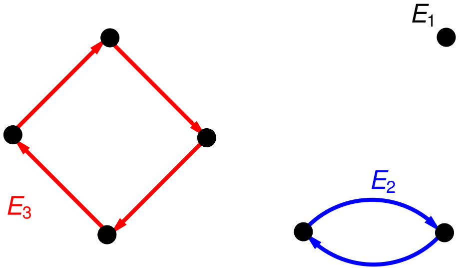
Induljunk ki egy csúcsból és éleken lépkedve építsünk egy S sétát addig amíg el nem akadunk, azaz amikor már nincs ki futó még fel nem használt él abból a csúcsból ahol vagyunk. Mivel minden csúcs foka páros ezért csak a kiinduló csúcsban akadhatunk el, így tehát egy S zárt körsétát kapunk. S a kiinduló csúcsra illeszkedő összes élet tartalmazza.
Hagyjuk el S éleit és a kiinduló csúcsot.

Bizonyítás (Euler-körsétás rész)



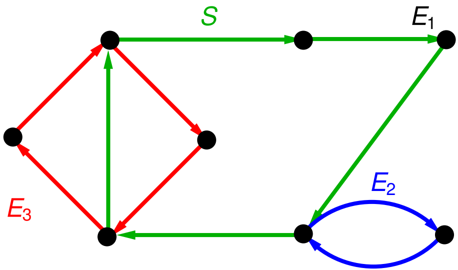
A kapott gráf nem feltétlenül összefüggő, azonban minden csúcsának a foka páros, hiszen minden csúcsra S-nek páros számú éle illeszkedett.

Bizonyítás (Euler-körsétás rész)



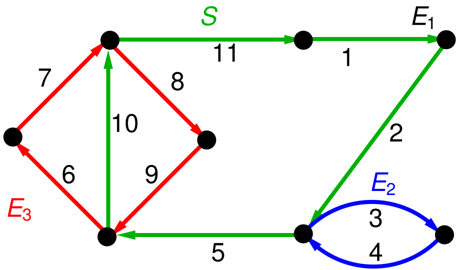
A kapott gráf nem feltétlenül összefüggő, azonban minden csúcsának a foka páros, hiszen minden csúcsra S-nek páros számú éle illeszkedett.
Az összefüggő komponenesek csúcsszáma kisebb mint n (kezdőcsúcs elhagyása miatt) ezért indukciós feltevés miatt van külön-külön Euler-körsétájuk, legyenek ezek $E_1, E_2, \ldots, E_k$.

Bizonyítás (Euler-körsétás rész)



A kapott gráf nem feltétlenül összefüggő, azonban minden csúcsának a foka páros, hiszen minden csúcsra S-nek páros számú éle illeszkedett.
Az összefüggő komponenesek csúcsszáma kisebb mint n (kezdőcsúcs elhagyása miatt) ezért indukciós feltevés miatt van külön-külön Euler-körsétájuk, legyenek ezek $E_1, E_2, \ldots, E_k$.
S-ből és $E_1, E_2, \ldots, E_k$-kból összerakható egy Euler-körsétája G-nek úgy, hogy minden egyes esetben ha S mentén haladva egy új komponensbe először lépünk bele akkor ott a megfelelő E_i-n lépkedünk tovább, így E_i-t belefűzve S-be. $\square$

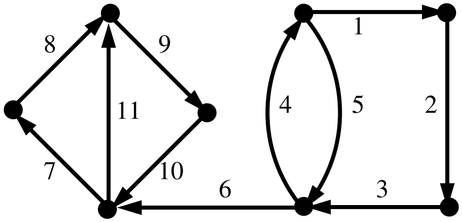
Bizonyítás (Euler-körsétás rész)



A kapott gráf nem feltétlenül összefüggő, azonban minden csúcsának a foka páros, hiszen minden csúcsra S-nek páros számú éle illeszkedett.
Az összefüggő komponenesek csúcsszáma kisebb mint n (kezdőcsúcs elhagyása miatt) ezért indukciós feltevés miatt van külön-külön Euler-körsétájuk, legyenek ezek $E_1, E_2, \ldots, E_k$.
S-ből és $E_1, E_2, \ldots, E_k$-kból összerakható egy Euler-körsétája G-nek úgy, hogy minden egyes esetben ha S mentén haladva egy új komponensbe először lépünk bele akkor ott a megfelelő E_i-n lépkedünk tovább, így E_i-t belefűzve S-be. $\square$

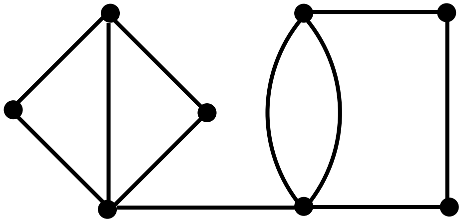
Bizonyítás: (Euler-sétás eset)

$\Longrightarrow$ Az Euler-séta kezdő és végpontját kivéve minden csúcsba pontosan annyiszor lépünk be mint ki, emiatt a kezdő és végpontot kivéve a többi csúcs foka páros.



Bizonyítás: (Euler-sétás eset)

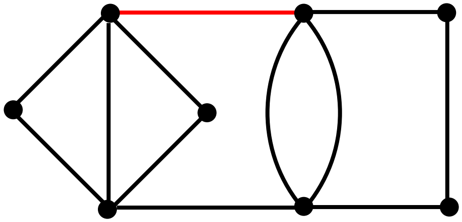
$\Longrightarrow$ Az Euler-séta kezdő és végpontját kivéve minden csúcsba pontosan annyiszor lépünk be mint ki, emiatt a kezdő és végpontot kivéve a többi csúcs foka páros.



$\Longleftarrow$ Ha a gráfban 0 a páratlan fokú csúcsok száma, akkor az Euler-körsétás bizonyítás működik. Ellenkező esetben a két páratlan fokú csúcs közé húzzunk be egy élet.

Bizonyítás: (Euler-sétás eset)

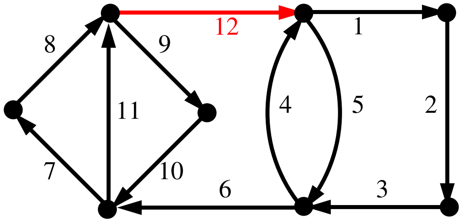
$\Longrightarrow$ Az Euler-séta kezdő és végpontját kivéve minden csúcsba pontosan annyiszor lépünk be mint ki, emiatt a kezdő és végpontot kivéve a többi csúcs foka páros.



$\Longleftarrow$ Ha a gráfban 0 a páratlan fokú csúcsok száma, akkor az Euler-körsétás bizonyítás működik. Ellenkező esetben a két páratlan fokú csúcs közé húzzunk be egy élet. Az így kapott gráfban nincs páratlan fokú csúcs tehát van benne Euler-körséta.

Bizonyítás: (Euler-sétás eset)

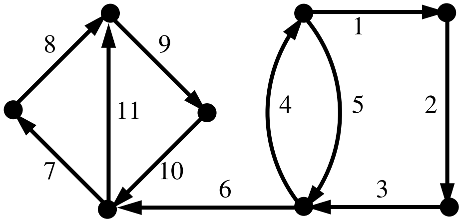
$\Longrightarrow$ Az Euler-séta kezdő és végpontját kivéve minden csúcsba pontosan annyiszor lépünk be mint ki, emiatt a kezdő és végpontot kivéve a többi csúcs foka páros.



$\Longleftarrow$ Ha a gráfban 0 a páratlan fokú csúcsok száma, akkor az Euler-körsétás bizonyítás működik. Ellenkező esetben a két páratlan fokú csúcs közé húzzunk be egy élet. Az így kapott gráfban nincs páratlan fokú csúcs tehát van benne Euler-körséta. Ebből a behúzott élet eldobva az eredeti gráf Euler-sétáját kapjuk.

Bizonyítás: (Euler-sétás eset)

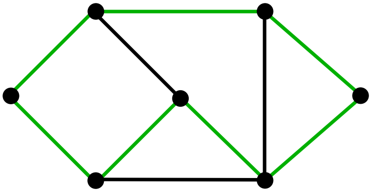
$\Longrightarrow$ Az Euler-séta kezdő és végpontját kivéve minden csúcsba pontosan annyiszor lépünk be mint ki, emiatt a kezdő és végpontot kivéve a többi csúcs foka páros.

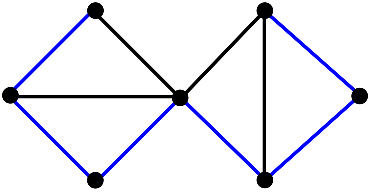


$\Longleftarrow$ Ha a gráfban 0 a páratlan fokú csúcsok száma, akkor az Euler-körsétás bizonyítás működik. Ellenkező esetben a két páratlan fokú csúcs közé húzzunk be egy élet. Az így kapott gráfban nincs páratlan fokú csúcs tehát van benne Euler-körséta. Ebből a behúzott élet eldobva az eredeti gráf Euler-sétáját kapjuk.

Hamilton-kör, Hamilton-út

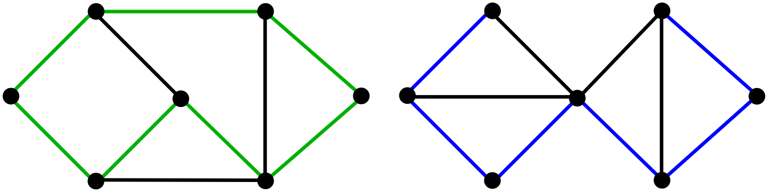
Az Euler-körsétánál illetve -sétánál az volt a cél, hogy körbejárjuk a gráfot úgy, hogy minden élet pontosan egyszer használjunk. Közben egy ponton többször is áthaladhattunk. Most úgy szeretnénk körbejárni a gráfot, hogy minden ponton pontosan egyszer haladunk át. Közben persze nem feltétlenül használunk minden élet.





Hamilton-kör, Hamilton-út

Az Euler-körsétánál illetve -sétánál az volt a cél, hogy körbejárjuk a gráfot úgy, hogy minden élet pontosan egyszer használjunk. Közben egy ponton többször is áthaladhattunk. Most úgy szeretnénk körbejárni a gráfot, hogy minden ponton pontosan egyszer haladunk át. Közben persze nem feltétlenül használunk minden élet.



Definíció: A G gráf egy H köre **Hamilton-kör**, ha H tartalmazza a G gráf összes csúcsát.

Definíció: A G gráf egy P útja **Hamilton-út**, ha P tartalmazza a G gráf összes csúcsát.

Mikor van egy gráfban Hamilton-kör vagy -út?

Erre nincs egyszerű válasz. Valószínűleg nincs gyorsan ellenőrizhető feltétel ami eldöntené, hogy egy gráfban van-e Hamilton-kör vagy -út.

Érdekesség: Ha lenne olyen eljárás ami gyorsan (például cn^6 lépésben, ahol n a csúcsok száma) eldöntené, hogy egy tetszőleges gráf tartalmaz-e Hamilton-kört vagy -utat, akkor a ma elterjedt titkosítási eljárások mind haszontalanná válnának. Gyors Hamilton-kör kereséssel gyorsan fel lehetne őket törni.

Ezzel szemben ismerünk olyan tulajdonságokat, melyek szükségesek vagy elégségesek Hamilton-kör vagy -út létezése szempontjából.

Elégséges feltételek

Dirach Tétel

Ha az n csúcsú ($n \geq 3$) egyszerű gráf minden csúcsának a foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor a gráf tartalmaz Hamilton-kört.

Ore Tétel

Ha az n csúcsú ($n \geq 3$) egyszerű gráf összes nem szomszédos u, v csúcspárjára igaz, hogy $d(u) + d(v) \geq n$
(u és v fokszámainak az összege legalább n), akkor a gráf tartalmaz Hamilton-kört.

Elégséges feltételek

Dirach Tétel

Ha az n csúcsú ($n \geq 3$) egyszerű gráf minden csúcsának a foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor a gráf tartalmaz Hamilton-kört.

Ore Tétel

Ha az n csúcsú ($n \geq 3$) egyszerű gráf összes nem szomszédos u, v csúcspárjára igaz, hogy $d(u) + d(v) \geq n$
(u és v fokszámainak az összege legalább n), akkor a gráf tartalmaz Hamilton-kört.

Lemma (Segéd Állítás)

Legyen G egy n csúcsú egyszerű gráf ahol u és v csúcsok nem szomszédosak és $d(u) + d(v) \geq n$. Legyen továbbá $G + uv$ az a gráf amit G-ből úgy kapunk, hogy behúzzuk az uv élet. Ekkor:
G-ben van Hamilton-kör $\iff$ $G + uv$-ben van Hamilton-kör.

Lemma bizonyítása:

$\Longrightarrow$: Ha G-ben van Hamilton-kör akkor egy új él behúzása ezt nyílván nem szünteti meg, így ez $G + uv$-ben is egy Ham-kör.

Lemma bizonyítása:

$\Longrightarrow$: Ha G-ben van Hamilton-kör akkor egy új él behúzása ezt nyílván nem szünteti meg, így ez $G + uv$-ben is egy Ham-kör.

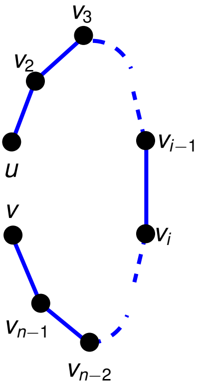
$\Longleftarrow$: $G + uv$-nek van Ham-köre, legyen ez H. Ha a H nem tartalmazza az uv élet akkor H Ham-köre G-nek is.

Lemma bizonyítása:

$\Longrightarrow$: Ha G-ben van Hamilton-kör akkor egy új él behúzása ezt nyílván nem szünteti meg, így ez $G + uv$-ben is egy Ham-kör.

$\Longleftarrow$: $G + uv$-nek van Ham-köre, legyen ez H. Ha a H nem tartalmazza az uv élet akkor H Ham-köre G-nek is.

Különben $H \setminus uv$ egy Hamilton-út G-ben. Jelöljük a csúcsait $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$ -vel úgy, hogy v_{j-1} és v_j szomszédosak minden j-re.

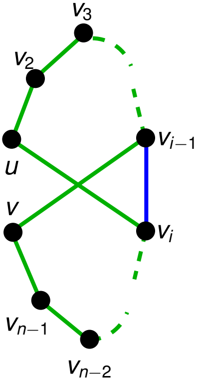


Lemma bizonyítása:

$\Longrightarrow$: Ha G-ben van Hamilton-kör akkor egy új él behúzása ezt nyílván nem szünteti meg, így ez $G + uv$-ben is egy Ham-kör.

$\Longleftarrow$: $G + uv$-nek van Ham-köre, legyen ez H. Ha a H nem tartalmazza az uv élet akkor H Ham-köre G-nek is.

Különben $H \setminus uv$ egy Hamilton-út G-ben. Jelöljük a csúcsait $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$ -vel úgy, hogy v_{j-1} és v_j szomszédosak minden j-re.
Ha v_i össze van kötve u-val és v_{i-1} össze van kötve v-vel akkor van egy Hamilton körünk.

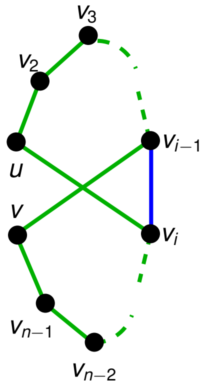


Lemma bizonyítása:

$\Longrightarrow$: Ha G-ben van Hamilton-kör akkor egy új él behúzása ezt nyílván nem szünteti meg, így ez $G + uv$-ben is egy Ham-kör.

$\Longleftarrow$: $G + uv$-nek van Ham-köre, legyen ez H. Ha a H nem tartalmazza az uv élet akkor H Ham-köre G-nek is.

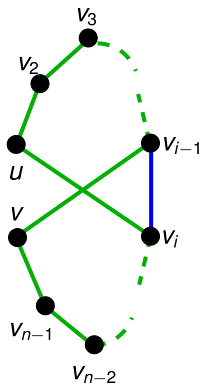
Különben $H \setminus uv$ egy Hamilton-út G-ben. Jelöljük a csúcsait $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$ -vel úgy, hogy v_{j-1} és v_j szomszédosak minden j-re.
Ha v_i össze van kötve u-val és v_{i-1} össze van kötve v-vel akkor van egy Hamilton körünk.
Ha nem lenne olyan i amire az előző sor teljesül, akkor $v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$ csúcsok közül v legalább $d(u) - 1$ darabbal nem szomszédos.



Lemma bizonyítása:

$\Longrightarrow$: Ha G-ben van Hamilton-kör akkor egy új él behúzása ezt nyílván nem szünteti meg, így ez $G + uv$-ben is egy Ham-kör.
$\Longleftarrow$: $G + uv$-nek van Ham-köre, legyen ez H. Ha a H nem tartalmazza az uv élet akkor H Ham-köre G-nek is.

Különben $H \setminus uv$ egy Hamilton-út G-ben. Jelöljük a csúcsait $u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v$ -vel úgy, hogy v_{j-1} és v_j szomszédosak minden j-re.
Ha v_i össze van kötve u-val és v_{i-1} össze van kötve v-vel akkor van egy Hamilton körünk.
Ha nem lenne olyan i amire az előző sor teljesül, akkor $v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$ csúcsok közül v legalább $d(u) - 1$ darabbal nem szomszédos.
u és v szomszédai a $v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$ csúcsok közül kerülnek ki, ezért ekkor a fokszámuk összege maximum
$d(u) + n - 2 - (d(u) - 1) = n - 1$ lehetne, ami kevesebb mint n. Tehát minden esetben van alkalmas i index amivel a jobb oldali ábra előáll. $\square$



Elégséges feltételek bizonyítása

Állítás

Minden teljes gráfnak van Hamilton-köre.

Bizonyítás (Ore tétel): Legyenek $e_1, e_2, \ldots, e_k$ a G gráfból hiányzó élek, azaz $\overline{G}$ élei.

Elégséges feltételek bizonyítása

Állítás

Minden teljes gráfnak van Hamilton-köre.

Bizonyítás (Ore tétel): Legyenek $e_1, e_2, \ldots, e_k$ a G gráfból hiányzó élek, azaz $\overline{G}$ élei.
$G + e_1$-re továbbra is teljesül az Ore tétel feltétele, hiszen a fokszámokat él hozzávételével nem csökkentettük.

Elégséges feltételek bizonyítása

Állítás

Minden teljes gráfnak van Hamilton-köre.

Bizonyítás (Ore tétel): Legyenek $e_1, e_2, \dots, e_k$ a G gráfból hiányzó élek, azaz $\overline{G}$ élei.
$G + e_1$-re továbbra is teljesül az Ore tétel feltétele, hiszen a fokszámokat él hozzávételével nem csökkentettük.
A lemma alapján G-ben pontosan akkor van Ham-kör amikor $G + e_1$-ben, abban meg pontosan akkor van Ham-kör amikor $G + e_1 + e_2$-ben.

Elégséges feltételek bizonyítása

Állítás

Minden teljes gráfnak van Hamilton-köre.

Bizonyítás (Ore tétel): Legyenek $e_1, e_2, \ldots, e_k$ a G gráfból hiányzó élek, azaz $\overline{G}$ élei.
$G + e_1$-re továbbra is teljesül az Ore tétel feltétele, hiszen a fokszámokat él hozzávételével nem csökkentettük.
A lemma alapján G-ben pontosan akkor van Ham-kör amikor $G + e_1$-ben, abban meg pontosan akkor van Ham-kör amikor $G + e_1 + e_2$-ben. Tehát akkor G-ben pontosan akkor van Ham-kör amikor $G + e_1 + e_2$-ben.

Elégséges feltételek bizonyítása

Állítás

Minden teljes gráfnak van Hamilton-köre.

Bizonyítás (Ore tétel): Legyenek $e_1, e_2, \ldots, e_k$ a G gráfból hiányzó élek, azaz $\overline{G}$ élei.
$G + e_1$-re továbbra is teljesül az Ore tétel feltétele, hiszen a fokszámokat él hozzávételével nem csökkentettük.
A lemma alapján G-ben pontosan akkor van Ham-kör amikor $G + e_1$-ben, abban meg pontosan akkor van Ham-kör amikor $G + e_1 + e_2$-ben. Tehát akkor G-ben pontosan akkor van Ham-kör amikor $G + e_1 + e_2$-ben.
A gondolatmenetet folytatva azt kapjuk, hogy G-ben pontosan akkor van Ham-kör ha $G + e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_k = K_n$-ben van Ham-kör. Utóbbiban viszont mindig van, ezért G-ben is van Hamilton-kör. $\square$

Bizonyítás (Dirach tétel): Az Ore tételből egyből következik, hiszen ha a Dirac feltétele teljesül akkor az Ore feltétele is.

Szükséges feltétel

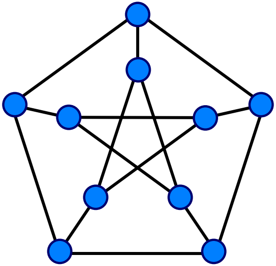
Tétel

Ha egy G gráfban van Hamilton-kör, akkor a G gráfból tetszőleges k csúcs (és a rájuk illeszkedő élek) elhagyása után a gráf legfeljebb k összefüggő komponensre esik szét.

Tétel

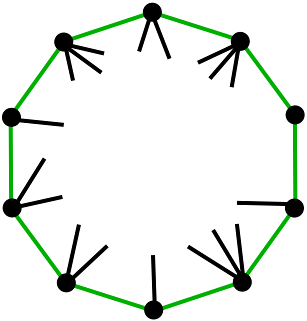
Ha egy G gráfban van Hamilton-út, akkor a G gráfból tetszőleges k csúcs (és a rájuk illeszkedő élek) elhagyása után a gráf legfeljebb $k+1$ összefüggő komponensre esik szét.

Fontos!!! Ez egy szükséges feltétel, de nem elégséges. A jobb oldali gráfban akárhogy hagyok el csúcsokat, sosem esik szét több komponensre mint ahány csúcsot elhagytam, még sincs benne Hamilton-kör!



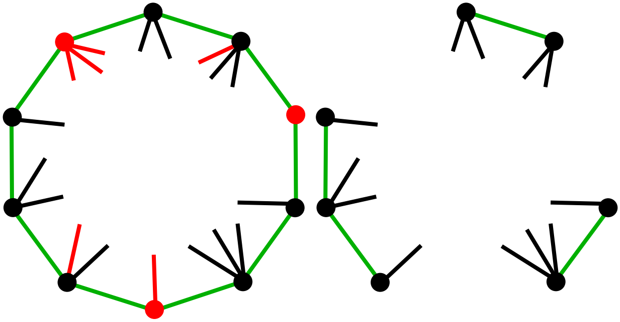
Bizonyítás:

Legyen G egy gráf aminek van Hamilon-köre. Legyen H egy ilyen Hamilton-kör G-ben.



Bizonyítás:

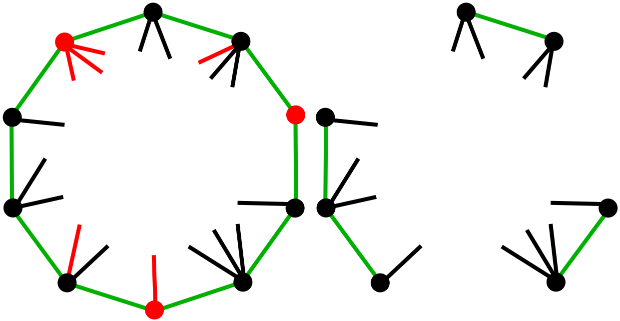
Legyen G egy gráf aminek van Hamilon-köre. Legyen H egy ilyen Hamilton-kör G-ben.



Tetszőleges k csúcsot elhagyva ekkor H maximum k ívre esik szét.

Bizonyítás:

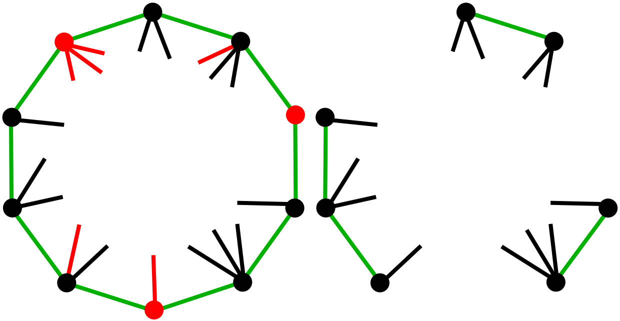
Legyen *G* egy gráf aminek van Hamilon-köre. Legyen *H* egy ilyen Hamilton-kör *G*-ben.



Tetszőleges *k* csúcsot elhagyva ekkor *H* maximum *k* ívre esik szét. Az ívek között még futhatnak élek, így maximum *k* összefüggő komponens lehet az elhagyás után kapott gráfban.

Bizonyítás:

Legyen G egy gráf aminek van Hamilon-köre. Legyen H egy ilyen Hamilton-kör G-ben.



Tetszőleges k csúcsot elhagyva ekkor H maximum k ívre esik szét. Az ívek között még futhatnak élek, így maximum k összefüggő komponens lehet az elhagyás után kapott gráfban. Ha egy útból k csúcsot hagyok el az maximum $k + 1$ összefüggő részre esik, így Hamilton-út esetén $k + 1$ szerepel k helyett.$\square$