# Alapkörrendszer, Minimális költségű feszítőfák

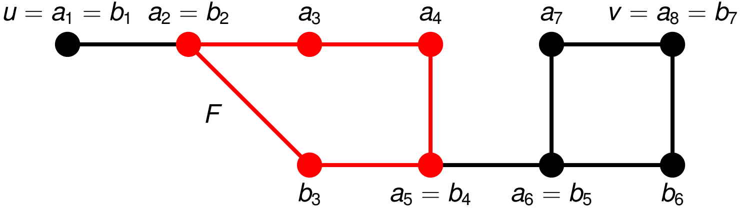
Papp László

BME

2022.09.16.

## Fában két csúcs között 1 út van

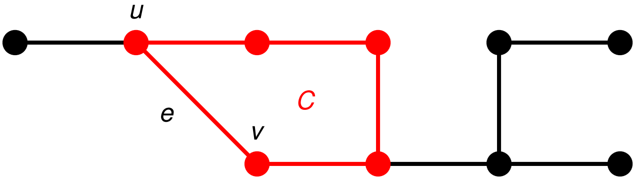
**Állítás:** Ha $F$ egy fa, $u$ és $v$ két csúcsa $F$-nek, akkor $u$ és $v$ között pontosan egy út vezet.




**Bizonyítás:** Mivel $F$ összefüggő, ezért $u$ és $v$ között vezet egy $u = a_1, a_2, \ldots a_k = v$ út. (Az éleket most nem írtuk bele a sorozatba.) Indirekt tegyük fel, hogy létezik egy ettől különböző $u = b_1, b_2, \ldots b_l = v$ út. Mivel a két út nem azonos, létezik, egy $i$ index, hogy $a_i = b_i$ de $a_{i+1} \neq b_{i+1}$. Legyen $j$ és $j'$ a legkisebb indexek melyekre $j, j' > i$ és $a_j = b_{j'}$. Ilyen $j$ van, hiszen a két út előbb utóbb találkozik, legkésőbb $v$-nél. Ekkor $a_i, a_{i+1}, \ldots a_{j-1}, a_j = b_{j'}, b_{j'-1}, \ldots b_i + 1, b_i = a_i$ egy kört alkot. Egy fában viszont nincs kör, ellentmondás.

## Fához egy él hozzáadása 1 kört ad

**Állítás:** Ha $F$ egy fa, $u$ és $v$ az $F$ különböző csúcsai és az $e = \{u, v\}$ nem éle $F$-nek, akkor az $F$-ből az $e = \{u, v\}$ él hozzáadásával kapott gráfban pontosan 1 db kör található.

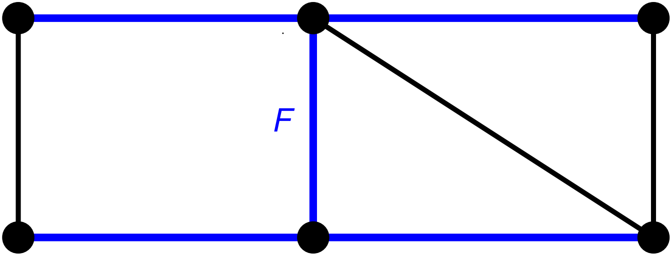



**Bizonyítás:** Jelölje $F + e$ az $F$-ből $e$ él hozzáadásával kapott gráfot. Az $F$ fában $u$ és $v$ között található út. Ekkor ezt az utat $e = \{u, v\}$ éllel kiegészítve egy $F + e$ beli kört kapunk . Indirekt tegyük fel, hogy az $F + e$ két egymástól különböző kört is tartalmaz. Legyen ez $C_1$ és $C_2$. $F$-ben nincs kör, emiatt $C_1$ és $C_2$ is tartalmazza az $e$ élet. Jelölje $C_1 - e$ a $C_1$-ből $e$ törlésével kapott részgráfot. Ekkor $C_1 - e$ és $C_2 - e$ két különböző részgráfja $F$-nek. Továbbá $C_1 - e$ és $C_2 - e$ is egy $u$ és $v$ között vezető út. Emiatt nem lehetnek különbözőek. Ellentmondás.

# Alapkörök

**Definíció**

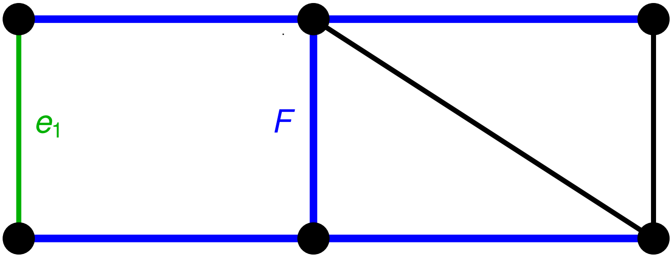
Legyen $F$ a $G$ gráf egy feszítőfája, továbbá legyen $e$ egy olyan éle $G$-nek amit az $F$ feszítőfa nem tartalmaz. Ekkor ha $F$-hez hozzáadom az $e$ élet, akkor egyetlen egy kör alakul ki. Ezt a kört az $F$ feszítőfához tartozó **alapkörnek** nevezzük.



# Alapkörök

**Definíció**

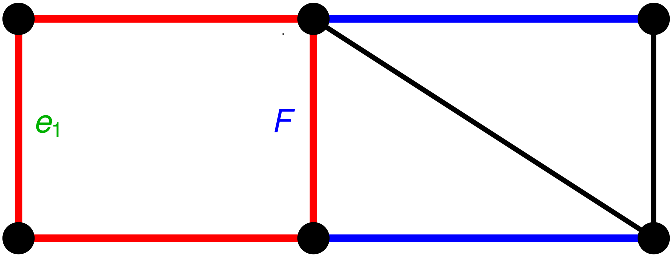
Legyen $F$ a $G$ gráf egy feszítőfája, továbbá legyen $e$ egy olyan éle $G$-nek amit az $F$ feszítőfa nem tartalmaz. Ekkor ha $F$-hez hozzáadom az $e$ élet, akkor egyetlen egy kör alakul ki. Ezt a kört az $F$ feszítőfához tartozó **alapkörnek** nevezzük.



# Alapkörök

## Definíció

Legyen $F$ a $G$ gráf egy feszítőfája, továbbá legyen $e$ egy olyan éle $G$-nek amit az $F$ feszítőfa nem tartalmaz. Ekkor ha $F$-hez hozzáadom az $e$ élet, akkor egyetlen egy kör alakul ki. Ezt a kört az $F$ feszítőfához tartozó **alapkörnek** nevezzük.

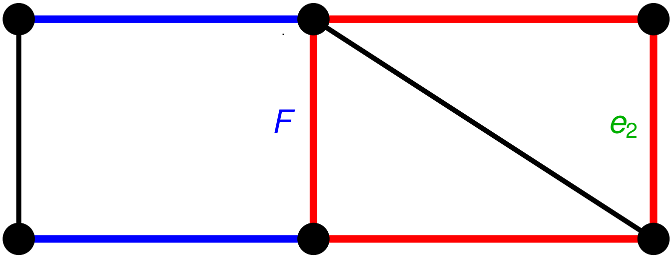



Az $F$ feszítőfához tartozó **alapkörrendszer (fundamentális körrendszer)** az $F$-hez tartozó alapkörök halmaza.

# Alapkörök

**Definíció**

Legyen $F$ a $G$ gráf egy feszítőfája, továbbá legyen $e$ egy olyan éle $G$-nek amit az $F$ feszítőfa nem tartalmaz. Ekkor ha $F$-hez hozzáadom az $e$ élet, akkor egyetlen egy kör alakul ki. Ezt a kört az $F$ feszítőfához tartozó **alapkörnek** nevezzük.

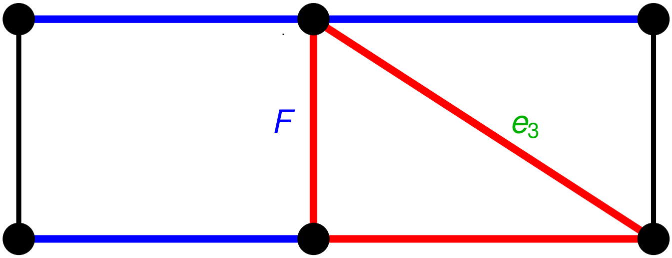



Az $F$ feszítőfához tartozó **alapkörrendszer (fundamentális körrendszer)** az $F$-hez tartozó alapkörök halmaza.

# Alapkörök

**Definíció**

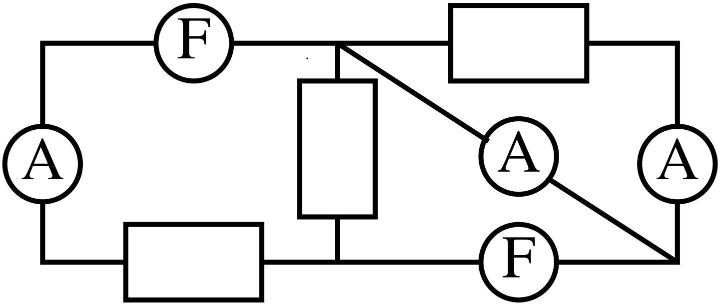
Legyen $F$ a $G$ gráf egy feszítőfája, továbbá legyen $e$ egy olyan éle $G$-nek amit az $F$ feszítőfa nem tartalmaz. Ekkor ha $F$-hez hozzáadom az $e$ élet, akkor egyetlen egy kör alakul ki. Ezt a kört az $F$ feszítőfához tartozó **alapkörnek** nevezzük.




Az $F$ feszítőfához tartozó **alapkörrendszer (fundamentális körrendszer)** az $F$-hez tartozó alapkörök halmaza.

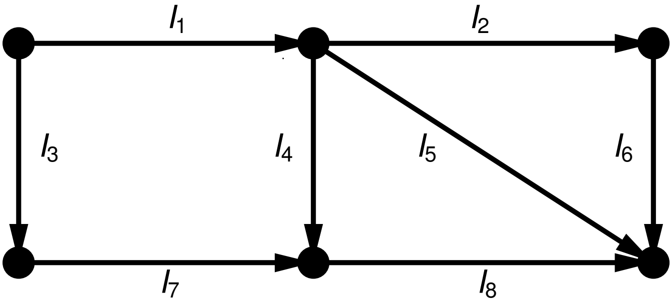
# Egy villamosságtani feladat

Adott egy villamoshálózat, ismertek az alkatrészek paraméterei és írjuk fel minden körére a hurok törvényt!



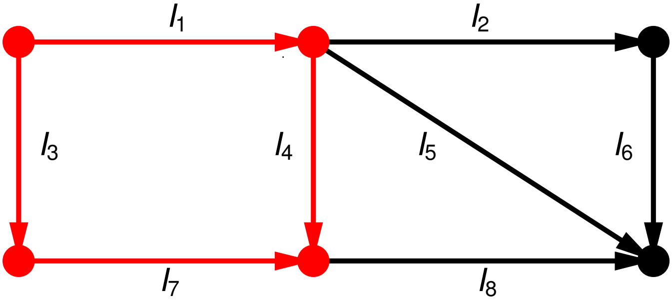
# Egy villamoságtani feladat

Adott egy villamoshálózat, ismertek az alkatrészek paraméterei és írjuk fel minden körére a hurok törvényt!




A villamoshálózatot ábrázolhatjuk egy gráfként ahol a csúcsok az ekvipotenciális felületek, az élek pedig az alkatrészek. Az élek irányítása tetszőlges, viszont az adott élen folyó áram irányát az él irányításához viszonyítjuk.

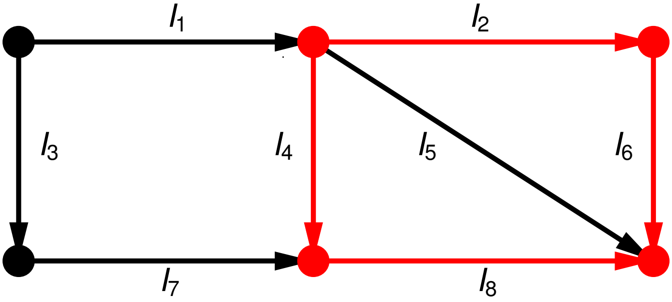
## Hurok törvény felírása minden körre




$$I_1 + I_4 - I_7 - I_3 = 0 \qquad (1)$$

(6)

# Hurok törvény felírása minden körre

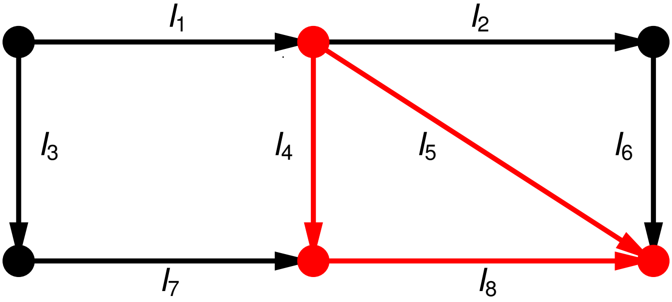



$$I_1 + I_4 - I_7 - I_3 = 0 \qquad (1)$$

$$I_2 + I_6 - I_8 - I_4 = 0 \qquad (2)$$

$$(6)$$

# Hurok törvény felírása minden körre



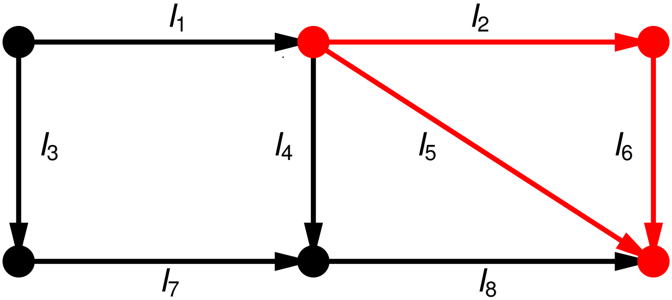

$$I_1 + I_4 - I_7 - I_3 = 0 \qquad (1)$$

$$I_2 + I_6 - I_8 - I_4 = 0 \qquad (2)$$

$$I_5 - I_8 - I_4 = 0 \qquad (3)$$

(6)

## Hurok törvény felírása minden körre




$$I_1 + I_4 - I_7 - I_3 = 0 \qquad (1)$$

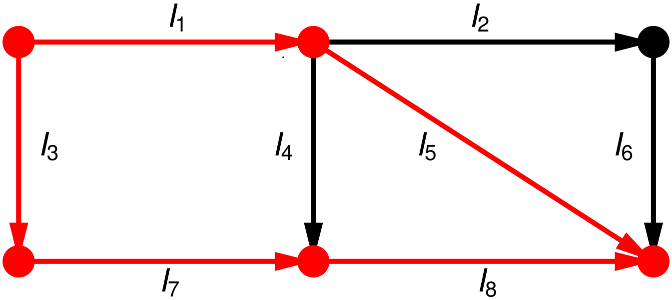
$$I_2 + I_6 - I_8 - I_4 = 0 \qquad (2)$$

$$I_5 - I_8 - I_4 = 0 \qquad (3)$$

$$I_2 + I_6 - I_5 = 0 \qquad (4)$$

(6)

## Hurok törvény felírása minden körre




$$I_1 + I_4 - I_7 - I_3 = 0 \qquad (1)$$

$$I_2 + I_6 - I_8 - I_4 = 0 \qquad (2)$$

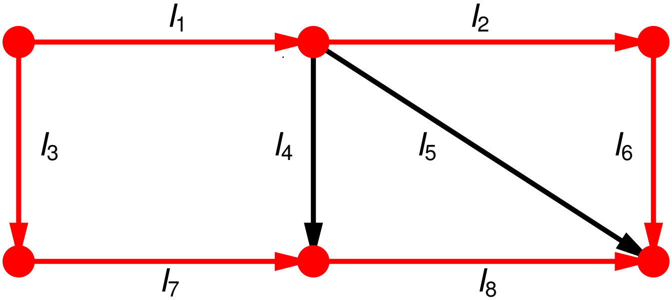
$$I_5 - I_8 - I_4 = 0 \qquad (3)$$

$$I_2 + I_6 - I_5 = 0 \qquad (4)$$

$$I_1 + I_5 - I_8 - I_7 - I_3 = 0 \qquad (5)$$

$$(6)$$

# Hurok törvény felírása minden körre




$$I_1 + I_4 - I_7 - I_3 = 0 \qquad (1)$$
$$I_2 + I_6 - I_8 - I_4 = 0 \qquad (2)$$
$$I_5 - I_8 - I_4 = 0 \qquad (3)$$
$$I_2 + I_6 - I_5 = 0 \qquad (4)$$
$$I_1 + I_5 - I_8 - I_7 - I_3 = 0 \qquad (5)$$
$$I_1 + I_2 + I_6 - I_8 - I_7 - I_3 = 0 \qquad (6)$$

Az első három egyenletből kifejezhető a többi.
(4)=(2)-(3)
(5)=(1)+(3)
(6)=(1)+(2)

# Alapkörrendszer alkalmazása a villamosságtanban

**Kérdés:** Mely körökre célszerű felírni a Huroktörvényt?
**Válasz:** Láttuk, hogy nem kell az összesre. Igazából mindíg elég egy alapkörrendszerre. Ezt nem bizonyítjuk, mert mátrixok kellenének a bizonyításhoz.

Alapkörrendszer könnyen kereshető. Elég egy feszítőfát találni, majd külön-külön hozzávenni a kimaradó éleket és az így kapott gráfokban megkeresni az egyetlen kört.

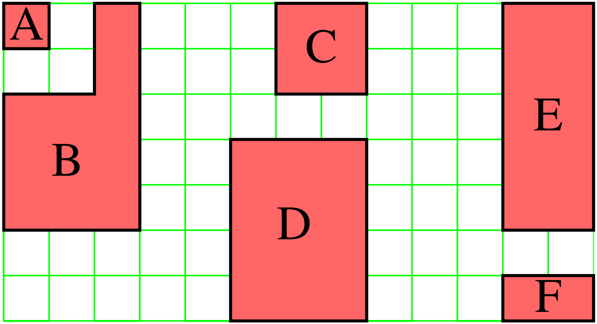
# Alapkörrendszer alkalmazása a villamosságtanban

**Kérdés:** Mely körökre célszerű felírni a Huroktörvényt?
**Válasz:** Láttuk, hogy nem kell az összesre. Igazából mindíg elég egy alapkörrendszerre. Ezt nem bizonyítjuk, mert mátrixok kellenének a bizonyításhoz.

Alapkörrendszer könnyen kereshető. Elég egy feszítőfát találni, majd külön-külön hozzávenni a kimaradó éleket és az így kapott gráfokban megkeresni az egyetlen kört.

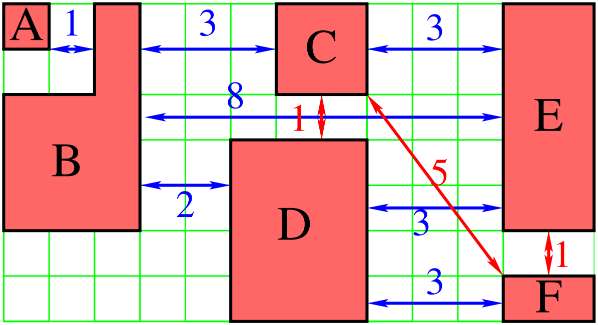
**Kérdés:** Mennyit nyerünk ezzel?
**Válasz:** Egy $n$ csúcsú gráfban lehet akár $\approx 2^{n-2}$ darab különböző kör. Ehhez képest alapkörből $e - n + 1$ darab van ahol $e$ az élszáma a gráfnak. Tehát nagyon sokat!

## Feladat



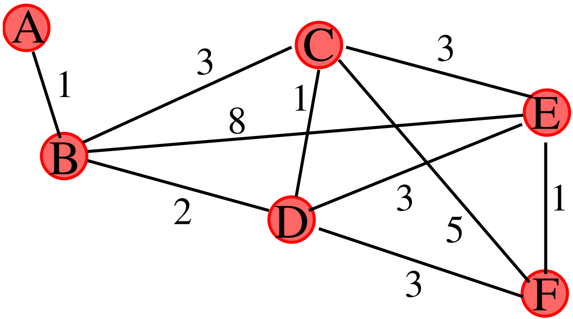

A fenti ábrán fém konténerekből készült tábor látható. Szeretnénk a konténereket leföldeni, viszont a talaj adottságai miatt csak az egyik konténernél tudjuk ezt megtenni. A konténereket ezért közéjük kifeszített kábelekkel kötjük össze. Legalább mennyi kábelre lesz szükségünk ha egy zöld négyzet oldala 1 méter távolságot jelöl?

## Feladat



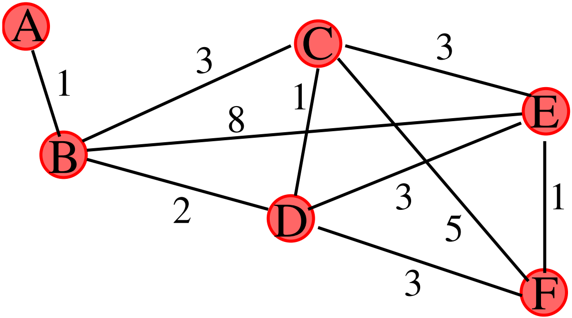

1. Számoljuk ki a távolságokat!

## Feladat



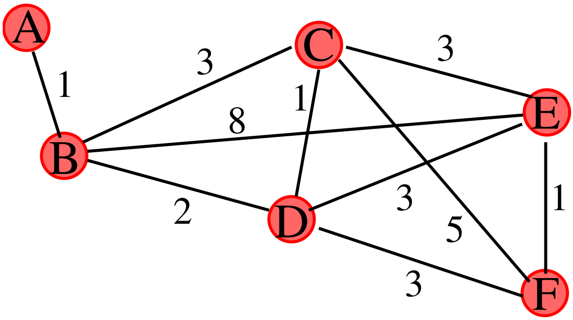

1. Számoljuk ki a távolságokat!
2. Készítsünk gráf modellt!

## Feladat




1. Számoljuk ki a távolságokat!
2. Készítsünk gráf modellt!
3. A gráfelmélet nyelvén fogalmazzuk meg a feladatot!

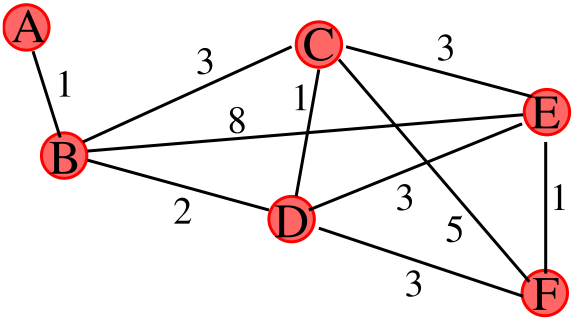
## Feladat




1. Számoljuk ki a távolságokat!
2. Készítsünk gráf modellt!
3. A gráfelmélet nyelvén fogalmazzuk meg a feladatot!
4. Oldjuk meg a feladatot!

## Feladat megoldása

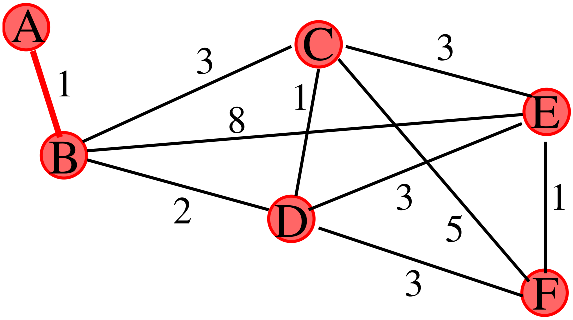
Kört nem szeretnénk, hiszen az fölösleges anyaghasználat lenne.




Mohón húzzuk be az éleket úgy, hogy ne hozzunk létre kört addig amíg összefüggő nem lesz a gráf!

## Feladat megoldása

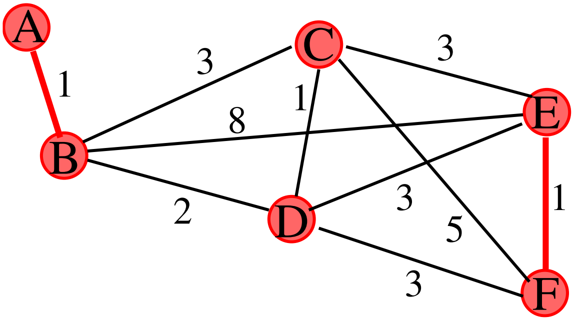
Kört nem szeretnénk, hiszen az fölösleges anyaghasználat lenne.




Mohón húzzuk be az éleket úgy, hogy ne hozzunk létre kört addig amíg összefüggő nem lesz a gráf!

## Feladat megoldása

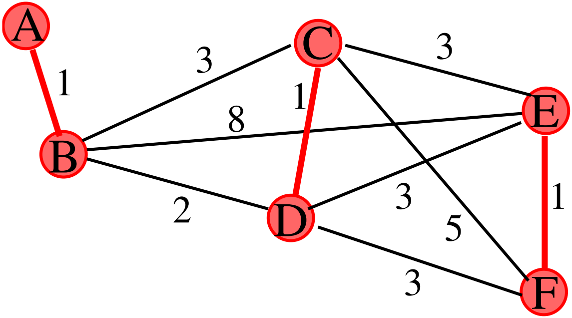
Kört nem szeretnénk, hiszen az fölösleges anyaghasználat lenne.




Mohón húzzuk be az éleket úgy, hogy ne hozzunk létre kört addig amíg összefüggő nem lesz a gráf!

## Feladat megoldása

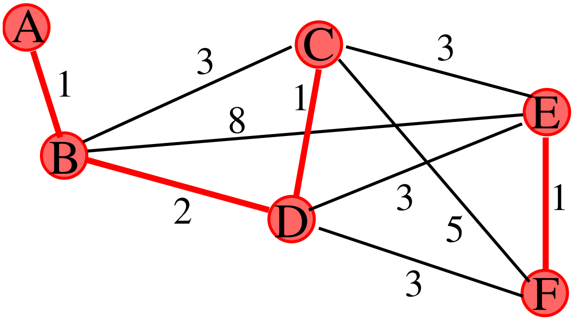
Kört nem szeretnénk, hiszen az fölösleges anyaghasználat lenne.




Mohón húzzuk be az éleket úgy, hogy ne hozzunk létre kört addig amíg összefüggő nem lesz a gráf!

## Feladat megoldása

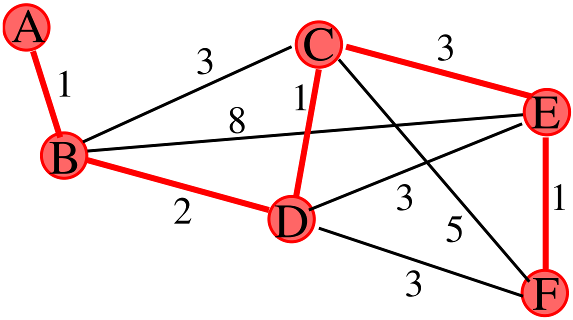
Kört nem szeretnénk, hiszen az fölösleges anyaghasználat lenne.




Mohón húzzuk be az éleket úgy, hogy ne hozzunk létre kört addig amíg összefüggő nem lesz a gráf!

## Feladat megoldása

Kört nem szeretnénk, hiszen az fölösleges anyaghasználat lenne.




Mohón húzzuk be az éleket úgy, hogy ne hozzunk létre kört addig amíg összefüggő nem lesz a gráf!
A megoldás tehát az, hogy összesen 8 méter kábel kell és megkaptuk azt is, hogy mely épületek közé feszítsük ki.

## Minimális költségű feszítőfa

Legyen $G$ egy tetszőleges gráf és $s : E(G) \to \mathbb{R}$ egy súlyfüggvény a $G$ élhalmazán. Ekkor ha vesszük $G$ éleinek egy $X$ részhalmazát, akkor ennek az $X$-nek a súlyán a $\sum_{e \in X} s(e)$ összeget értjük és ezt a számot $s(X)$-szel jelöljük. ($\sum_{e \in X} s(e)$ az X-et alkotó élek súlyainak az összege.) Az $Y$ részgráf súlyán az $E(Y)$ élhalmaz súlyát értjük, ennek a jele $s(Y)$.
A $G$ gráf egy $F$ feszítőfája minimális súlyú feszítőfa az $s$ súlyozásra nézve, ha minden másik $F'$ feszítőfa esetén $s(F) \leq s(F')$.

Az előző feladatban egy gráf minimális súlyú feszítőfáját kerestük, ráadásul mohó módon.

**Definíció:** Egy algoritmus (eljárás) **mohó**, ha minden egyes lépésben az éppen legjobbank tűnő lehetőséget választja.

**Megjegyzés:** Általában a mohóság nem célravezető és a mohó algoritmusok többnyire rossz eredményt adnak!

# A Kruskal algoritmus

## Kruskal algoritmus

Input: $G = (V, E)$ gráf és egy $s : E \to \mathbb{R}$ élsúlyfüggvény.

1. A gráf éleit a súlyuk szerint növekvő sorrendbe rendezzük: $s(e_1) \leq s(e_2) \leq s(e_3) \leq \ldots \leq s(e_m)$, ahol $m = |E|$.
2. Kezdetben legyen $F := \emptyset$ és legyen $i := 1$.
3. Amennyiben a $(V, F \cup \{e_i\})$ gráf körmentes, akkor $F$-hez vegyük hozzá az $e_i$-t.
4. Ha $i < m$ akkor növeljük $i$-t 1-gyel és ugorjunk a 3. pontra.
5. Output: $(V, F)$ gráf, G egy feszítő erdeje.

**Megjegyzés:** A Kruskal algoritmus mohó, és az előbb pont ezt futtattuk.

# A Kruskal algoritmus

## Kruskal algoritmus

Input: $G = (V, E)$ gráf és egy $s : E \to \mathbb{R}$ élsúlyfüggvény.

1. A gráf éleit a súlyuk szerint növekvő sorrendbe rendezzük: $s(e_1) \leq s(e_2) \leq s(e_3) \leq \ldots \leq s(e_m)$, ahol $m = |E|$.
2. Kezdetben legyen $F := \emptyset$ és legyen $i := 1$.
3. Amennyiben a $(V, F \cup \{e_i\})$ gráf körmentes, akkor $F$-hez vegyük hozzá az $e_i$-t.
4. Ha $i < m$ akkor növeljük $i$-t 1-gyel és ugorjunk a 3. pontra.
5. Output: $(V, F)$ gráf, G egy feszítő erdeje.

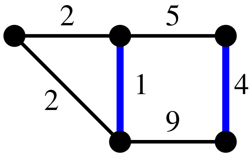
**Megjegyzés:** A Kruskal algoritmus mohó, és az előbb pont ezt futtattuk.

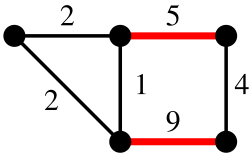
**Állítás (Kruskal algoritmus helyessége):**

Ha a $G$ gráf összefüggő akkor a Kruskal algoritmus $G$ egy minimális súlyú feszítőfáját adja.

# Eszköz a Kruskal helyességének igazolásához

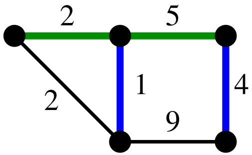
**Definíció:** Az $F^* \subseteq E(G)$ élek egy részhalmazát optimálisnak nevezzük, ha $F^*$ további (esetlegesen 0db) él hozzávételével kiegészíthető $G$-nek egy minimális súlyú feszítőfájává.

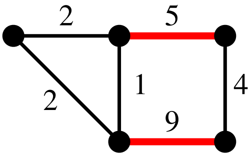


## Eszköz a Kruskal helyességének igazolásához

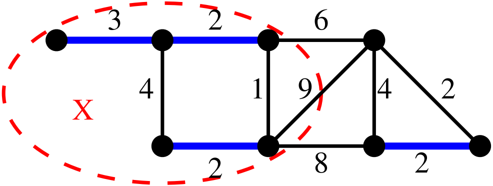
**Definíció:** Az $F^* \subseteq E(G)$ élek egy részhalmazát optimálisnak nevezzük, ha $F^*$ további (esetlegesen 0db) él hozzávételével kiegészíthető $G$-nek egy minimális súlyú feszítőfájává.



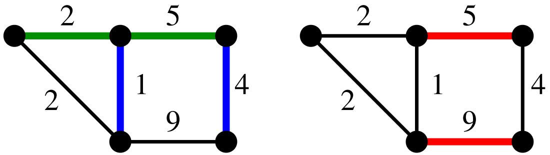

A kék halmaz optimális, a piros nem.

**Állítás:** Legyen $F^*$ optimális és $X \subset V$ a csúcsok egy valódi részhalmaza úgy, hogy $X$ és $V \setminus X$ között nem vezet $F^*$-beli él. Legyen továbbá $f$ egy legkisebb súlyú $X$ és $V \setminus X$ között futó él. Ekkor az $F^* \cup f$ is optimális.



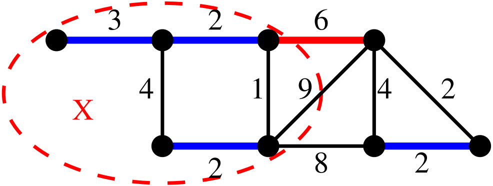
## Eszköz a Kruskal helyességének igazolásához

**Definíció:** Az $F^* \subseteq E(G)$ élek egy részhalmazát optimálisnak nevezzük, ha $F^*$ további (esetlegesen 0db) él hozzávételével kiegészíthető $G$-nek egy minimális súlyú feszítőfájává.

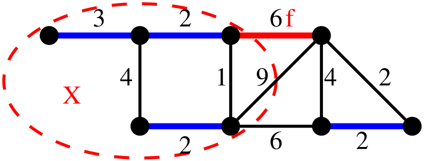



A kék halmaz optimális, a piros nem.

**Állítás:** Legyen $F^*$ optimális és $X \subset V$ a csúcsok egy valódi részhalmaza úgy, hogy $X$ és $V \setminus X$ között nem vezet $F^*$-beli él. Legyen továbbá $f$ egy legkisebb súlyú $X$ és $V \setminus X$ között futó él. Ekkor az $F^* \cup f$ is optimális.

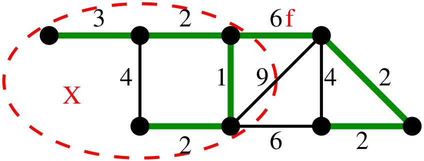


## Állítás bizonyítása:



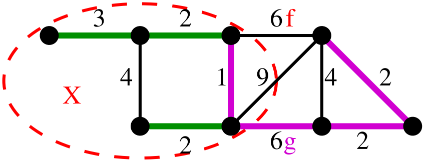

Legyen $(V, F)$ egy olyan minimális súlyú feszítőfa amivé $F^*$ kiegészíthető. Amennyiben $f \in F$, akkor $F^* \cup \{f\}$ is kiegészíthető $(V, F)$-é és készen vagyunk.

**Állítás bizonyítása:**



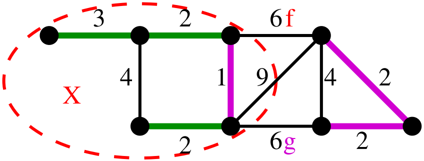

Legyen $(V, F)$ egy olyan minimális súlyú feszítőfa amivé $F^*$ kiegészíthető. Amennyiben $f \in F$, akkor $F^* \cup \{f\}$ is kiegészíthető $(V, F)$-é és készen vagyunk.

## Állítás bizonyítása:



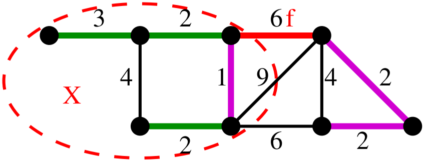

Legyen $(V, F)$ egy olyan minimális súlyú feszítőfa amivé $F^*$ kiegészíthető. Amennyiben $f \in F$, akkor $F^* \cup \{f\}$ is kiegészíthető $(V, F)$-é és készen vagyunk.
Ha $f \notin F$, akkor $(V, F)$-ben található egy út ami $f$ két végpontját köti össze. Ez az út $X$-ből indul és $V \setminus X$-ben ér véget. Emiatt ez az út tartalmaz egy olyan $g$ élet ami $X$ és $V \setminus X$ között fut.

## Állítás bizonyítása:



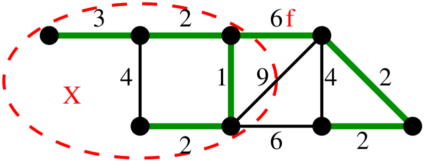

Legyen $(V, F)$ egy olyan minimális súlyú feszítőfa amivé $F^*$ kiegészíthető. Amennyiben $f \in F$, akkor $F^* \cup \{f\}$ is kiegészíthető $(V, F)$-é és készen vagyunk.
Ha $f \notin F$, akkor $(V, F)$-ben található egy út ami $f$ két végpontját köti össze. Ez az út $X$-ből indul és $V \setminus X$-ben ér véget. Emiatt ez az út tartalmaz egy olyan $g$ élet ami $X$ és $V \setminus X$ között fut. $F$-ből $g$-t kitörölve $(V, F)$ két összefüggő komponensre esik szét.

## Állítás bizonyítása:




Legyen $(V, F)$ egy olyan minimális súlyú feszítőfa amivé $F^*$ kiegészíthető. Amennyiben $f \in F$, akkor $F^* \cup \{f\}$ is kiegészíthető $(V, F)$-é és készen vagyunk.
Ha $f \notin F$, akkor $(V, F)$-ben található egy út ami $f$ két végpontját köti össze. Ez az út $X$-ből indul és $V \setminus X$-ben ér véget. Emiatt ez az út tartalmaz egy olyan $g$ élet ami $X$ és $V \setminus X$ között fut. $F$-ből $g$-t kitörölve $(V, F)$ két összefüggő komponensre esik szét. $f$ ezen két összefüggő komponens között fut, ezért ha $f$-et hozzávesszük az így kapott $(V, F \setminus \{g\})$ gráfhoz akkor ismét feszítőfát kapunk.

## Állítás bizonyítása:




Legyen $(V, F)$ egy olyan minimális súlyú feszítőfa amivé $F^*$ kiegészíthető. Amennyiben $f \in F$, akkor $F^* \cup \{f\}$ is kiegészíthető $(V, F)$-é és készen vagyunk.
Ha $f \notin F$, akkor $(V, F)$-ben található egy út ami $f$ két végpontját köti össze. Ez az út $X$-ből indul és $V \setminus X$-ben ér véget. Emiatt ez az út tartalmaz egy olyan $g$ élet ami $X$ és $V \setminus X$ között fut. $F$-ből $g$-t kitörölve $(V, F)$ két összefüggő komponensre esik szét. $f$ ezen két összefüggő komponens között fut, ezért ha $f$-et hozzávesszük az így kapott $(V, F \setminus \{g\})$ gráfhoz akkor ismét feszítőfát kapunk. $f$ választása miatt $s(f) \leq s(g)$. Mivel $s(F \setminus \{g\} \cup \{f\}) = s(F) - s(g) + s(f) \leq s(F)$, ezért a kapott $(V, F \setminus \{g\} \cup \{f\})$ is egy minimális súlyú feszítőfa. Ez tartalmazza $f$-et. Ezt az esetet már korábban vizsgáltuk. $\square$

## Kruskal helyességének bizonyítása

Legyen $G$ összefüggő. Az algoritmus által visszaadott $(V, F)$ gráf körmentes, hiszen minden lépésben elkerültük azt, hogy kör keletkezzen.

## Kruskal helyességének bizonyítása

Legyen $G$ összefüggő. Az algoritmus által visszaadott $(V, F)$ gráf körmentes, hiszen minden lépésben elkerültük azt, hogy kör keletkezzen. Továbbá ha $(V, F)$-hez hozzáadjuk $G$ bármely további élét, akkor kör keletkezik. Emiatt a $G$-ben szomszédos csúcsok $(V, F)$-ben azonos komponensben vannak. Mivel $G$ összefüggő, ezért $(V, F)$-ben minden csúcs ugyan abban az összefüggő komponensben található.

## Kruskal helyességének bizonyítása

Legyen $G$ összefüggő. Az algoritmus által visszaadott $(V, F)$ gráf körmentes, hiszen minden lépésben elkerültük azt, hogy kör keletkezzen. Továbbá ha $(V, F)$-hez hozzáadjuk $G$ bármely további élét, akkor kör keletkezik. Emiatt a $G$-ben szomszédos csúcsok $(V, F)$-ben azonos komponensben vannak. Mivel $G$ összefüggő, ezért $(V, F)$-ben minden csúcs ugyan abban az összefüggő komponensben található.
Tehát $(V, F)$ feszítőfa, már csak az kell, hogy minimális súlyú.

## Kruskal helyességének bizonyítása

Legyen $G$ összefüggő. Az algoritmus által visszaadott $(V, F)$ gráf körmentes, hiszen minden lépésben elkerültük azt, hogy kör keletkezzen. Továbbá ha $(V, F)$-hez hozzáadjuk $G$ bármely további élét, akkor kör keletkezik. Emiatt a $G$-ben szomszédos csúcsok $(V, F)$-ben azonos komponensben vannak. Mivel $G$ összefüggő, ezért $(V, F)$-ben minden csúcs ugyan abban az összefüggő komponensben található.

Tehát $(V, F)$ feszítőfa, már csak az kell, hogy minimális súlyú. $F$ kezdésként az üres halmaz, ami optimális. Amikor $F$-et egy $e$ él hozzávételével bővítjük, akkor $e$ él a $(V, F)$ két különböző összefüggő komponense között fut. Legyen $X$ az egyik ilyen komponens. Ekkor bármely $X$ és $V \setminus X$ között futó él hozzávehető $F$-hez kör létrehozása nélkül. Az $e$-nél kisebb súlyú éleket nem vehetjük már hozzá $F$-hez (már $F$-ben vannak vagy kört alakítanának ki), ezért $e$ egy legkisebb súlyú $X$ és $V \setminus X$ között futó él. A bizonyított állítást használva $e$-t $F$-hez hozzáadva a kapott halmaz szintén optimális.

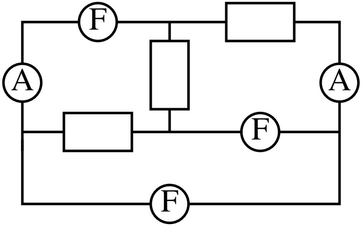
## Kruskal helyességének bizonyítása

Legyen $G$ összefüggő. Az algoritmus által visszaadott $(V, F)$ gráf körmentes, hiszen minden lépésben elkerültük azt, hogy kör keletkezzen. Továbbá ha $(V, F)$-hez hozzáadjuk $G$ bármely további élét, akkor kör keletkezik. Emiatt a $G$-ben szomszédos csúcsok $(V, F)$-ben azonos komponensben vannak. Mivel $G$ összefüggő, ezért $(V, F)$-ben minden csúcs ugyan abban az összefüggő komponensben található.

Tehát $(V, F)$ feszítőfa, már csak az kell, hogy minimális súlyú. $F$ kezdésként az üres halmaz, ami optimális. Amikor $F$-et egy $e$ él hozzávételével bővítjük, akkor $e$ él a $(V, F)$ két különböző összefüggő komponense között fut. Legyen $X$ az egyik ilyen komponens. Ekkor bármely $X$ és $V \setminus X$ között futó él hozzávehető $F$-hez kör létrehozása nélkül. Az $e$-nél kisebb súlyú éleket nem vehetjük már hozzá $F$-hez (már $F$-ben vannak vagy kört alakítanának ki), ezért $e$ egy legkisebb súlyú $X$ és $V \setminus X$ között futó él. A bizonyított állítást használva $e$-t $F$-hez hozzáadva a kapott halmaz szintén optimális. Az eljárás végén egy optimális feszítőfát kapunk, ami minimális súlyú. $\square$

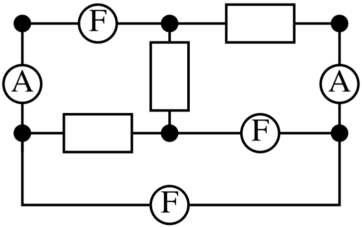
## Feszítőfák egy villamosságtani alkalmazása

Tekintsünk egy villamos hálózatot ami háromféle alkatrészt tartalmaz: ellenállást, áramforrást, feszültségforrást. Ebben a gráfban az alkatrészek az élek, a csúcsok pedig az ekvipotenciális felületek.



## Feszítőfák egy villamosságtani alkalmazása

Tekintsünk egy villamos hálózatot ami háromféle alkatrészt tartalmaz: ellenállást, áramforrást, feszültségforrást. Ebben a gráfban az alkatrészek az élek, a csúcsok pedig az ekvipotenciális felületek.

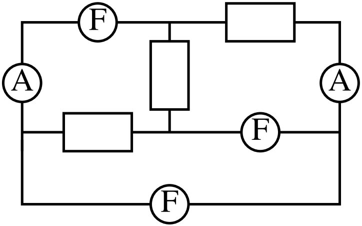


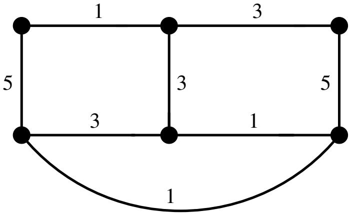

Ekkor a hálózat egyértelmű megoldhatóságának a szükséges feltétele, hogy a feszültségforrások körmentes részgráfot alkossanak az áramforrások pedig ne alkossanak elvágó élhalmazt. Ez a két feltétel akkor teljesül egyszerre ha a hálózatnak van olyan feszítőfája ami minden feszültségforrást tartalmaz, de nem tartalmaz áramforrást. Az ilyen feszítőfát **normál fának** nevezzük.

# Normál fa keresése

Az alkatrészeket helyettesítsük súlyokkal a következőképpen:

- Feszültségforrás 1
- Ellenállás 3
- Áramforrás 5

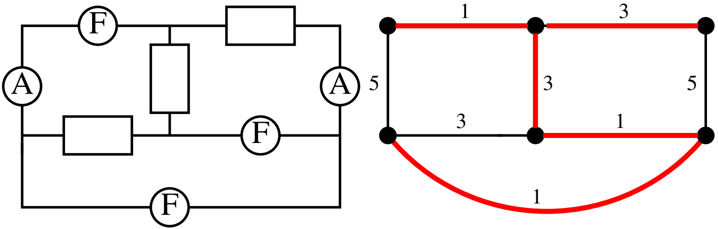


## Normál fa keresése

Az alkatrészeket helyettesítsük súlyokkal a következőképpen:

- Feszültségforrás 1
- Ellenállás 3
- Áramforrás 5

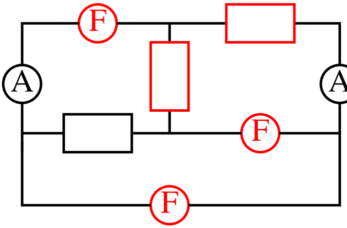


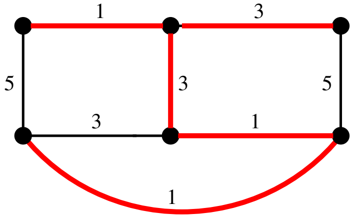

Ezután az így kapott élsúlyozott gráfban keressünk minimális súlyú feszítőfát Kruskal algoritmusával. Ha a kapott feszítőfa nem tartalmaz áramforrást és tartalmaz minden feszültségforrást, akkor megkaptunk egy normál fát. Ha viszont tartalmaz, akkor nincsen a hálózatnak normál fája.

## Normál fa keresése

Az alkatrészeket helyettesítsük súlyokkal a következőképpen:

- Feszültségforrás 1
- Ellenállás 3
- Áramforrás 5




Ezután az így kapott élsúlyozott gráfban keressünk minimális súlyú feszítőfát Kruskal algoritmusával. Ha a kapott feszítőfa nem tartalmaz áramforrást és tartalmaz minden feszültségforrást, akkor megkaptunk egy normál fát. Ha viszont tartalmaz, akkor nincsen a hálózatnak normál fája.

## Normál fák tekercsek és kondenzátorok esetén

Amennyiben tekercseket és/vagy kondenzátorokat is tartalmaz a villamos hálózat, akkor az egyértelmű megoldhatóság feltétele továbbra is az, hogy legyen olyan feszítőfa ami tartalmazza az összes feszültségforrást, de nem tartalmaz áramforrást. A hálózat megoldását a gyakorlatban nagyban segíti ha ez a feszítőfa a lehető legtöbb kondenzátort és a lehető legkevesebb tekercset tartalmazza. Ebben az esetben az ilyen tulajdonságú fát nevezzük normál fának.
Megkeresése:
Az alkatrészeket helyettesítsük súlyokkal a következőképpen:

- Feszültségforrás 1
- Kondenzátor 2
- Ellenállás 3
- Tekercs 4
- Áramforrás 5

Kruskállal minimális költségű feszítőfát keresek. Ha ez nem tartalmaz áramforrást de tartalmaz minden feszültségforrást, akkor normál fa.