9. előadás:

Bázis, dimenzió, standard bázis, koordinátavektor

2022.11.05 Hatvan

Papp László

Bázis

definíció: Legyen V egy tetszőleges altere $\mathbb{R}^n$-nek. Ekkor ha a $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ vektorhalmaz a V generátorrendszere és emelett lineárisan független, akkor a $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ vektorhalmazt a a V altér bázisának nevezzük.

Példa:

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ lineárisan független hiszen egyik vektor sem a másik skalárszorosa, másrészt generátorrendszere a $V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| \, x = y+z,\ x,y,z \in \mathbb{R}\right\}$ altérnek, hiszen ha $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in V$, akkor $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Tehát a $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ vektorhalmaz bázisa a $V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| \, x = y+z,\ x,y,z \in \mathbb{R}\right\}$ altérnek.

Bázis minden lineáris térben létezik.

Állítás: $\mathbb{R}^n$ tetszőleges alterének van bázisa.

Bizonyítás: Legyen $V \leq \mathbb{R}^n$. Ha $V=\{0\}$, akkor neki az üres halmaz bázisa. Különben válasszunk egy $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$ elemét V-nek. Ha $\underline{v}_1$ generátorrendszere V-nek, akkor $\{\underline{v}_1\}$ bázisa V-nek. Különben van egy $\underline{v}_2$ vektor ami nem áll elő $\{\underline{v}_1\}$ lineáris kombinációjaként. Tekintsük a $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ halmazt. Az újonnan érkező vektor lemmája miatt ez lineárisan független. Ha ez generátorrendszere V-nek, akkor bázisa is és kész vagyunk.
Különben tekintsük egy $\underline{v}_3$ elemét V-nek ami nem áll elő a $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ lineáris kombinációjaként. Ekkor újonnan érkező vektor lemmája miatt $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ lineárisan független. Ha generátorrendszer akkor bázis, külünben tekintsünk egy $\underline{v}_4 \in V$ ami nem áll elő $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ lineáris kombinációjaként. ...
Mivel $\mathbb{R}^n$-ben maximum n darab vektort lehet kiválasztani úgy, hogy együtt lineárisan függetlenek, ezért előbb utóbb e az eljárás leáll és az így kapott $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ egy bázisa V-nek.

Altér dimenziója

Állítás: Ha a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérnek a $B=\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ és $C=\{c_1, c_2, \dots, c_l\}$ külön-külön bázisa, akkor mindkét bázis ugyanannyi vektorból áll, azaz $k=l$.

Bizonyítás: Mivel B a V bázisa ezért B lineárisan független és $b_1 \in V, b_2 \in V, \dots b_k \in V$. Mivel C a V bázisa ezért C a V generátor-rendszere. Így az F-G egyenlőtlenség miatt $k \leq l$.
Ugyanez elmondható a B és C szerepét felcserélve és akkor az F-G egyenlőtlenség azt adja, hogy $l \leq k$.
A két korlátot egyesítve $k=l$. □

Tehát egy altér minden bázisának elemszáma megegyezik. Emiatt van értelme a következő definíciónak:

Definíció: A $V \leq \mathbb{R}^n$ altér egy B bázisát alkotó vektorok darabszámát a V altér dimenziójának nevezzük. Jele: $\dim(V)$

Standard bázis, $\mathbb{R}^n$ dimenziója.

Emlékeztető:

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i. koordináta}$$

e_i-t az i. standard bázisvektornak hívjuk

Állítás: $\mathbb{R}^n$-ben a $S=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ vektorhalmaz bázist alkot. Ezt a vektorhalmazt az $\mathbb{R}^n$ standard (ejtsd sztenderd) bázisának nevezik.

Bizonyítás: Egyedül e_i i. koordinátája nem 0, így ha a nullvektort akarjuk előállítani S-beli vektorok lineáris kombinációjaként, akkor e_i-t 0-szor vehetjük csak. Ez minden i-re elmondható, tehát a nullvektort S-ből csak a triviális lineáris kombinációval tudjuk előállítani, azaz ha $\underline{0}=\lambda_1\underline{e}_1+\lambda_2\underline{e}_2+\dots+\lambda_n\underline{e}_n \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$.
Így S lineárisan független.
S generátorrendszer, hiszen $\underline{v}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$: $\underline{v}=x_1\underline{e}_1+x_2\underline{e}_2+\dots+x_n\underline{e}_n$

Következmény: $\dim(\mathbb{R}^n)=n$.

Koordinátavektor, annak egyértelműsége

Állítás: Legyen $B=\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}$ egy bázisa a $V \leq \mathbb{R}^n$ altérnek. Legyen $\underline{v} \in V$, azaz v a V altérbe tartozó vektor. Ekkor $\underline{v}$ pontosan egyféleképpen írható fel a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz a $\underline{v}=\lambda_1\underline{b}_1+\lambda_2\underline{b}_2+\ldots+\lambda_k\underline{b}_k$ egyenletnek pontosan egy megoldása van.

Bizonyítás: B bázisa V-nek, emiatt minden V-beli vektor előállítható $b_1, b_2, \ldots, b_k$ lineáris kombinációjaként, így v is. Indirekt tegyük fel, hogy v kétféleképpen is előállítható, azaz $\underline{v}=\lambda_1\underline{b}_1+\lambda_2\underline{b}_2+\ldots+\lambda_k\underline{b}_k$ és $\underline{v}=\alpha_1\underline{b}_1+\alpha_2\underline{b}_2+\ldots+\alpha_k\underline{b}_k$ ahol valamely i-re $\lambda_i \neq \alpha_i$. Ekkor $0=\underline{v}-\underline{v}=(\lambda_1-\alpha_1)\underline{b}_1+(\lambda_2-\alpha_2)\underline{b}_2+\ldots+(\lambda_k-\alpha_k)\underline{b}_k$ egy nem triviális lineáris kombináció ami a nullvektort adja, emiatt B nem lineárisan független. Ez ellentmond B bázis voltának. $\square$

Definíció: A fentebbi egyenlet megoldásából kapott $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ oszlopvektort a v vektor B bázis szerinti koordinátavektorának nevezzük. Jele: $\underline{v}_{[B]}$

Példa koordinátavektorra

Tekintsük a korábban vizsgált $V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle|\ x=y+z,\ x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$ alteret és legyen $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ és $\underline{v}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$.

Korábban láttuk, hogy B a V egy bázisa, v pedig A V egy eleme.

Ekkor $\underline{v}=-2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, tehát $v_{[B]}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

<u>Megjegyzés</u>: Amikor egy sima $\mathbb{R}^n$-beli vektort írunk fel, akkor alapértelmezetten a standard bázis szerinti koordinátavektorát írjuk le. Hiszen $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\underline{e}_1+y\underline{e}_2+z\underline{e}_3$.

Mint a fenti példában láthatjuk a koordinátavektornak mindig annyi koordinátája van mint az altér dimenziója. Így az altér elemeit helytakarékosan tudjuk ábrázolni. Ez kódolásoknál és grafikánál nagyon hasznos.