Síkbarajzolt gráfok, Euler-formula, Kuratowski.

Papp László

BME

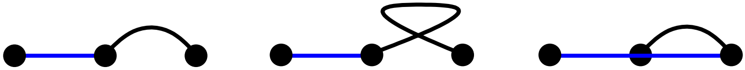
2022. október 14.

Gráfok lerajzolása

Definíció: Egy gráf **diagramján** a gráf olyan lerajzolását értjük ahol a csúcsok különböző síkbeli pontok, illetve az élek olyan síkgörbék amelyek:

- vépontjai az él végpontjainak megfelelő síkbeli pontok
- önmagukat nem metszik
- a saját végpontjaik kivételével minden más csúcsot elkerülnek.

Kérdés: Melyek diagrammjai az alábbiak közül a 3 hosszú útnak?

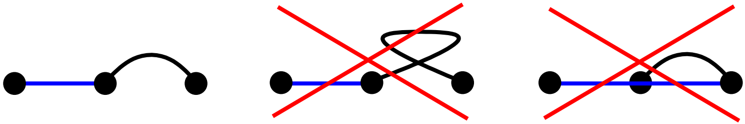


Gráfok lerajzolása

Definíció: Egy gráf **diagramján** a gráf olyan lerajzolását értjük ahol a csúcsok különböző síkbeli pontok, illetve az élek olyan síkgörbék amelyek:

- vépontjai az él végpontjainak megfelelő síkbeli pontok
- önmagukat nem metszik
- a saját végpontjaik kivételével minden más csúcsot elkerülnek.

Kérdés: Melyek diagrammjai az alábbiak közül a 3 hosszú útnak?

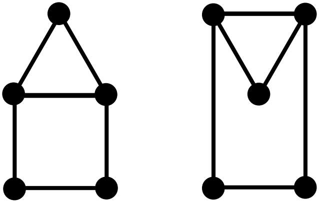


A baloldali diagram, a másik kettő viszont nem!

Síkbarajzolható gráfok

Definíció: Egy G **gráf síkbarajzolásán** egy olyan diagramját értjük amelyben az éleknek megfelelő görbék csak csúcsokban metszik egymást. Egy G gráf **síkbarajzolható** ha van síkbarajzolása.

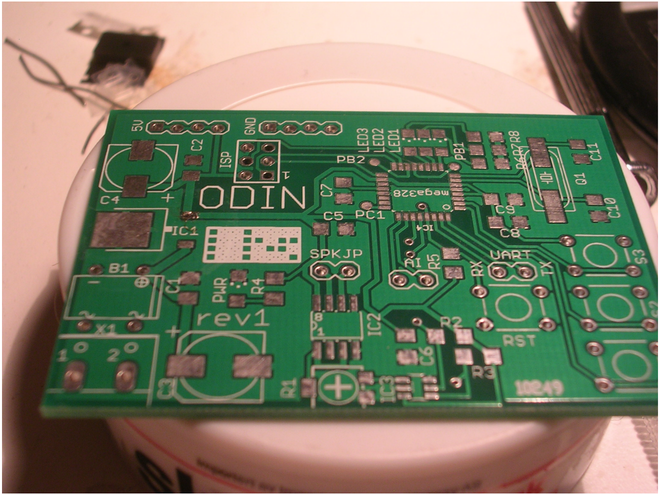
G egy síkbarajzolása esetén az éleknek megfelelő görbék **tartományokra (lapokra)** osztják a síkot. Van egy külső végtelen tartomány!



A ház gráf két különböző diagramja. Mindkét esetben három tartomány van, de a bal oldalon a külső tartomány ötszög, míg a jobb oldalon egy négyszög.

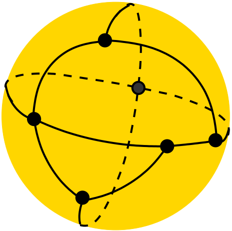
Miért érdekes ez?

Válasz: A nyák rétegei külön-külön síkbarajzolható gráfok.



Gömbre rajzolhatóság

Definíció: Egy G **gráf gömbrerajzolásán** a gráf egy gömbfelületre való olyan lerajzolását értjük, amelyben az éleknek megfelelő görbék csak csúcsokban metszik egymást. Egy G gráf **gömbrerajzolható** ha van gömbrerajzolása.

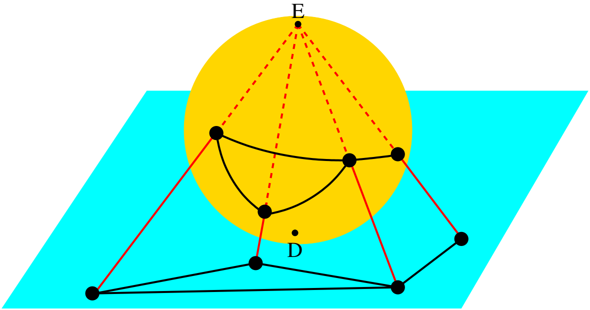


Állítás

Egy gráf pontosan akkor gömbrerajzolható ha síkbarajzolható.

Megjegyzés: Síkbarajzolható gráf nyílván gömbre is rajzolható. A fordított irány igazolásához egy módszert mutatunk amivel a sík és a gömbfelület egymásba átvihető.

Sztereografikus projekció



A gömböt a síkra helyezzük úgy, hogy a déli sarkban érintse azt. *E*-vel az északi sarkot jelöljük. A gömbfelület egy *P* pontját úgy képezzük le a síkra, hogy vesszük a az *EP* egyenest és megnézzük, hogy hol metszi a síkot, ez a pont lesz a *P* képe. Visszafele fordítva csináljuk ugyan ezt.
E-t kivéve a gömbfelület minden pontjának megfelel egy síkbeli pont. Igazából ez egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a gömbfelület$\setminus\{E\}$ és a sík pontjai között. *E* a sík végtelen távoli pontjának felel meg.

Sztereografikus projekció következményei

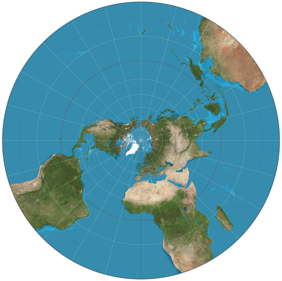
Egy gömbrerajzolható gráf síkbarajzolható, hiszen a gömbrerajzolásából sztereografikus projekcióval kaphatunk egy síkbarajzolását.

A külső tartomány nem kitüntetett. Egy síkbarajzolt gráf bármely T tartományából tudok külső tartományt csinálni az alábbi módszerrel:

1. A síkbarajzolásból sztereografikus projekcióval gömbre rajzolást készítek.
2. A gömböt úgy forgatom, hogy az északi sark a T tartományba kerüljön.
3. Az így kapott gömbrerajzolásból sztereografikus projekcióval síkbarajzolást készítek.

A sztereografikus projekció a térképészetben (érdekesség, nem kell tudni)

A föld gömbölyű ezért nem lehet róla méretarányos síkbeli ábrát készíteni. Emiatt minden térkép torzít. India valójában sokkal nagyobb mint tűnik, ezzel ellentétben Skandinávia és az Antarktisz pedig sokkal kisebb. A sarkokról emiatt ortografikus projekcióval készítik a térképeket amely nagyon hasonló a sztereografikushoz. Példaként álljon itt a föld egy részének sztereografikus projekciója:



Euler-formula (Euler-féle poliédertétel)

Tétel

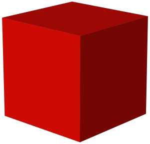
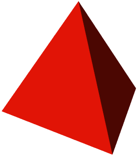
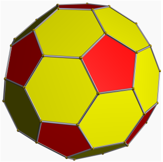
Amennyiben G egy síkbarajzolt összefüggő gráf, akkor $e = n + t - 2$ ahol n a G csúcsainak a száma, t a tartományainak száma, e pedig az éleinek a száma.

Euler-formula (Euler-féle poliédertétel)

Tétel

Amennyiben G egy síkbarajzolt összefüggő gráf, akkor $e = n + t - 2$ ahol n a G csúcsainak a száma, t a tartományainak száma, e pedig az éleinek a száma.

Kérdés: Miért nevezik ezt poliédertételnek?

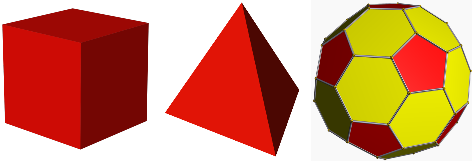




Euler-formula (Euler-féle poliédertétel)

Tétel

Amennyiben G egy síkbarajzolt összefüggő gráf, akkor $e = n + t - 2$ ahol n a G csúcsainak a száma, t a tartományainak száma, e pedig az éleinek a száma.

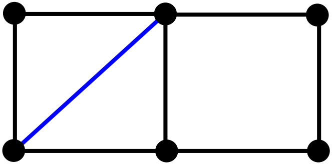
Kérdés: Miért nevezik ezt poliédertételnek?



Válasz: A poliéder egy belső pontjából a poliédert egy gömb felületére vetítve egy gömbrerajzolt gráfot kapunk. Ebből sztereografikus projekcióval síkgráf készíthető, melynek a csúcsai, élei és a tartományai megfelelnek a poliéder csúcsainak, éleinek és lapjainak. Ezen gráfot a poliéder élhálójának nevezik. Tehát a tétel nem csak síkbarajzolt gráfokról hanem poliéderekről is érdekes állítást fogalmaz meg.

Euler-formula bizonyítása

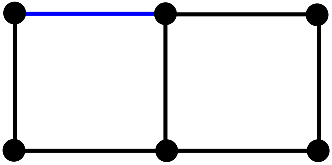
Legyen G egy síkbarajzolt összefüggő gráf n csúccsal, e éllel és t tartománnyal.



Vegyünk egy kört és ebből hagyjunk el egy élet.

Euler-formula bizonyítása

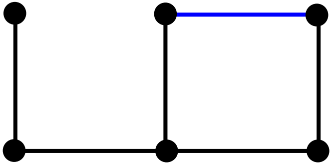
Legyen G egy síkbarajzolt összefüggő gráf n csúccsal, e éllel és t tartománnyal.



Vegyünk egy kört és ebből hagyjunk el egy élet.
Ekkor az élek száma és a tartományok száma is eggyel csökken, viszont a csúcsok száma nem változik.

Euler-formula bizonyítása

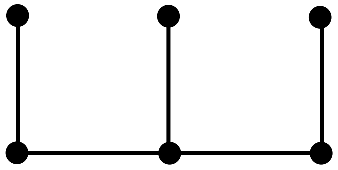
Legyen G egy síkbarajzolt összefüggő gráf n csúccsal, e éllel és t tartománnyal.



Vegyünk egy kört és ebből hagyjunk el egy élet.
Ekkor az élek száma és a tartományok száma is eggyel csökken, viszont a csúcsok száma nem változik.
Ismételjük ezt az eljárást addig amíg van a kapott gráfban kör.

Euler-formula bizonyítása

Legyen G egy síkbarajzolt összefüggő gráf n csúccsal, e éllel és t tartománnyal.



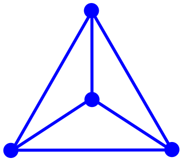
Vegyünk egy kört és ebből hagyjunk el egy élet.
Ekkor az élek száma és a tartományok száma is eggyel csökken, viszont a csúcsok száma nem változik.
Ismételjük ezt az eljárást addig amíg van a kapott gráfban kör.
Egy n csúcsú fát kapunk az eljárás végén, aminek $n-1$ éle és 1 tartománya van így igaz rá, hogy $e = n + t - 2$. Ha k darab élet hagytunk el akkor az egyenlet mindkét oldalát k-val csökkentetteük, így G-re is igaz a formula. $\square$

Euler-formula következményei

A G síkbarajzolható gráf minden síkbarjazolásában ugyan annyi a tartományok száma. (A fenti formulából egyelőre csak összefüggőekre következik az állítás, de az Euler-formula általánosítható nem összefüggő síkbarajzolható gráfokra is.)

Állítás

Ha G egyszerű n csúcsú és e éllel rendelkező síkbarajzolható gráf, akkor $e \leq 3n - 6$.

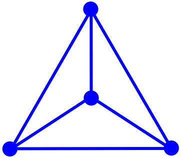


Euler-formula következményei

A G síkbarajzolható gráf minden síkbarjazolásában ugyan annyi a tartományok száma. (A fenti formulából egyelőre csak összefüggőekre következik az állítás, de az Euler-formula általánosítható nem összefüggő síkbarajzolható gráfokra is.)

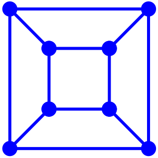
Állítás

Ha G egyszerű n csúcsú és e éllel rendelkező síkbarajzolható gráf, akkor $e \leq 3n - 6$.



Állítás

Ha G egyszerű n csúcsú és e éllel rendelkező síkbarajzolható gráf és nem tartalmaz három hosszú kört, akkor $e \leq 2n - 4$.



Bizonyítás:

Vegyük G-nek egy síkbarajzolását, és jelöljük az i. tartományt határoló élek számát c_i-vel.

Bizonyítás:

Vegyük G-nek egy síkbarajzolását, és jelöljük az i. tartományt határoló élek számát c_i-vel. Mivel minden tartományt legalább 3 él határol és egy él legfeljebb két tartományt tud határolni:

$$3t \leq c_1 + c_2 + \ldots + c_t \leq 2e$$

Bizonyítás:

Vegyük G-nek egy síkbarajzolását, és jelöljük az i. tartományt határoló élek számát c_i-vel. Mivel minden tartományt legalább 3 él határol és egy él legfeljebb két tartományt tud határolni:

$$3t \leq c_1 + c_2 + \ldots + c_t \leq 2e$$

Ha a gráf összefüggő, akkor használhatjuk az Euler-formulát, amiből a t-t kifejezve és behelyettesítve:

$$3(e - n + 2) \leq 2e$$

Ebből átrendezéssel adódik, hogy $e \leq 3n - 6$.
Ha G nem összefüggő hanem k komponensből áll, akkor legyen e_i és n_i az i. összefüggő komponens él- illetve csúcsszáma. Ekkor minden összefüggő komponesre felírhatjuk, hogy $e_i \leq 3n_i - 6$. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva megkapjuk, hogy
$e = \sum_{i=1}^{k} e_i \leq \sum_{i=1}^{k}(3n_i - 6) = 3n - 6k \leq 3n - 6$.

Bizonyítás:

Vegyük G-nek egy síkbarajzolását, és jelöljük az i. tartományt határoló élek számát c_i-vel. Mivel minden tartományt legalább 3 él határol és egy él legfeljebb két tartományt tud határolni:

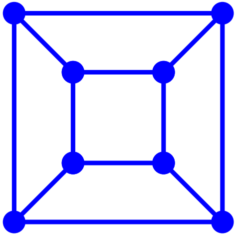
$$3t \leq c_1 + c_2 + \ldots + c_t \leq 2e$$

Ha a gráf összefüggő, akkor használhatjuk az Euler-formulát, amiből a t-t kifejezve és behelyettesítve:

$$3(e - n + 2) \leq 2e$$

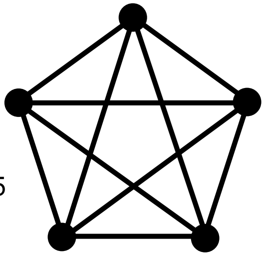
Ebből átrendezéssel adódik, hogy $e \leq 3n - 6$.
Ha G nem összefüggő hanem k komponensből áll, akkor legyen e_i és n_i az i. összefüggő komponens él- illetve csúcsszáma. Ekkor minden összefüggő komponesre felírhatjuk, hogy $e_i \leq 3n_i - 6$. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva megkapjuk, hogy
$e = \sum_{i=1}^{k} e_i \leq \sum_{i=1}^{k} (3n_i - 6) = 3n - 6k \leq 3n - 6$.

Bizonyítás:



Ha G egyszerű és nem tartalmaz három hosszú kört, akkor minden tartományt legalább 4 él határol, így:
$4t \leq c_1 + c_2 + \ldots + c_t \leq 2e$, amiből az előző számolással kapjuk, hogy $e \leq 2n - 4$. $\square$

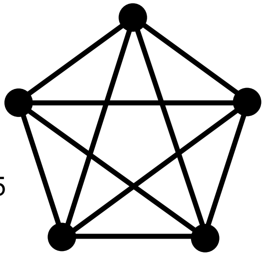
Néhány példa



K_5

Állítás:
A K_5 nem síkbarajzolható gráf.

Néhány példa



K_5

Állítás:

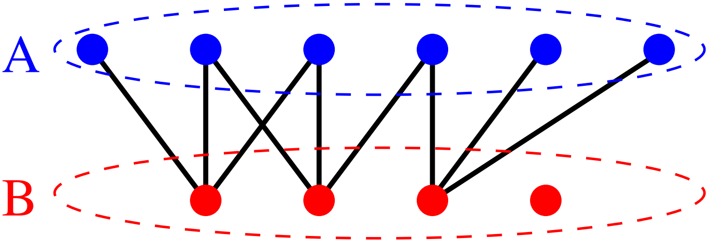
A K_5 nem síkbarajzohlató gráf.

Bizonyítás: Ha K_5 síkbarajzolható lenne, akkor teljesülnie kéne rá az $e \leq 3n - 6$ egyenlőtlenségnek. Viszont $n = 5$ és $e = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3n - 6$, tehát K_5 nem síkbarajzolható.

$\square$

Páros gráfok

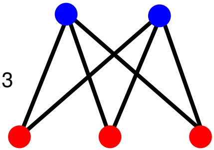
Definíció: A G gráfot páros gráfnak nevezzük, ha a csúcshalmaza felosztható két részre, A és B úgy, hogy A-beli csúcsok egymással nem szomszédosak és hasonlóan B-beli csúcsok egymással nem szomszédosak. Ekkor G-t szokás $G = (A, B, E)$-ként jelölni ahol E a G élhalmaza.



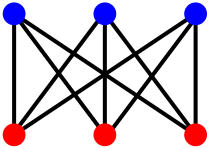
Teljes páros gráfok

Definíció: **Teljes páros gráfon** azt a $G = (A, B, E)$ páros gráfot értjük ahol minden A-beli csúcs össze van kötve minden B-belivel. Jele: $K_{|A|,|B|}$

$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



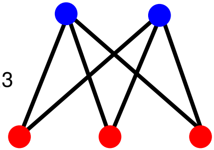
Állítás

$K_{3,3}$ nem síkbarajzolható.

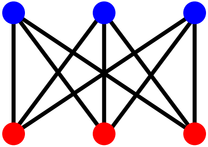
Teljes páros gráfok

Definíció: **Teljes páros gráfon** azt a $G = (A, B, E)$ páros gráfot értjük ahol minden A-beli csúcs össze van kötve minden B-belivel. Jele: $K_{|A|,|B|}$

$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



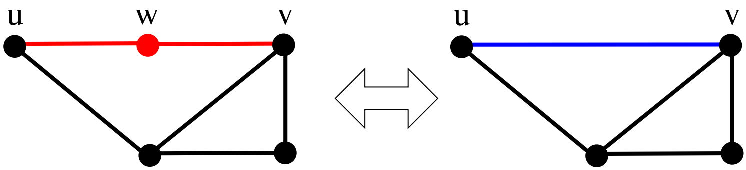
Állítás

$K_{3,3}$ nem síkbarajzolható.

Bizonyítás: A $K_{3,3}$ páros gráf, ezért nem tartalmaz páratlan hosszú kört, így 3 hosszút sem. Emiatt ha a $K_{3,3}$ síkbarajzolható lenne, akkor teljesülnie kéne rá az $e \leq 2n - 4$ egyenlőtlenségnek, viszont $n = 6$ és $e = 9 > 8 = 2 * 6 - 4 = 2n - 4$. Tehát a $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható. $\square$

Topológikus izomorfia

Definíció: A G és H gráfok **topologikusan izomorfak** ha az alábbi két művelet tetszőlegesen sok egymás utáni alkalmazásával G átvihető H-ba:

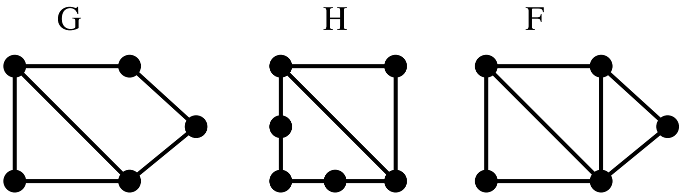


1. Hozzáadok a gráfhoz egy új w csúcsot és a gráf egy uv éle törlése után hozzáadom a gráfhoz az uw és wv éleket.
2. Ha a gráfban w egy másodfokú pont a rá illeszkedő uw és wv élekkel, akkor a w csúcsot és az uw, wv éleket kitörlöm, majd az uv élet hozzáadom a gráfhoz.

Megjegyzés: Ez a két művelet egymás inverze.

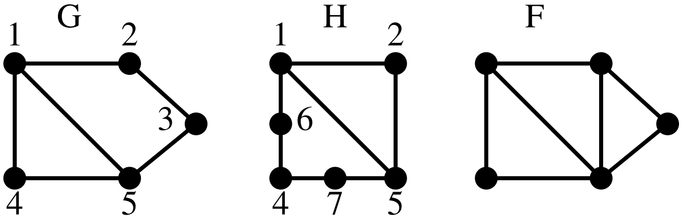
Topológikus izomorfia példa

Kérdés: G, H és F közül melyek topológikus izomorfak egymással?



Topológikus izomorfia példa

Kérdés: G, H és F közül melyek topológikus izomorfak egymással?

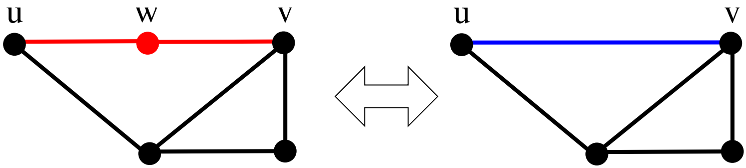


Válasz: G és H topológikusan izomorfak, hiszen *G*-ből a 3-as csúcs törlésével, és a 6-os és 7-es csúcs beszúrásával H-t kapjuk. Azonban *F* sem *G*-vel, sem pedig *H*-val nem topológikusan izomorf, hiszen *F*-nek van 4 fokú csúcsa, a többinek pedig nincs. Mindkét megengedett művelet pedig csak a másodfokú csúcsok számát változtatja, a többi csúcs fokát nem változtatja meg.

Topológikus izomorfia és a síkbarajzolhatóság kapcsolata.

Állítás

Ha G és H topológikusan izomorfak, akkor G pontosan akkor síkbarajzolható amikor H is.

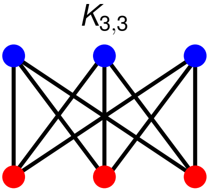


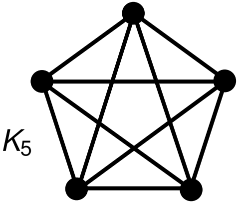
Bizonyítás: Elég belátni, hogy ha G síkbarajzolható, akkor abból következik, hogy H is síkbarajzohlató. A két művelet tartja a síkbarajzolhatóságot. Emiatt ha G-re alkalmazzuk bármelyik műveletet, akkor síkbarajzohlató gráfot kapunk. Ezután egymás után alkalmazva a műveleteket előbb utóbb H-t kapjuk és minden egyes lépés után a kapott gráf síkbarajzohlató volt, így H is. □

Kuratowski tétel

Tétel

Egy G gráf pontosan akkor síkbarajzolható ha nem tartalmaz se $K_{3,3}$-al, se K_5-tel topológikusan izomorf részgráfot.

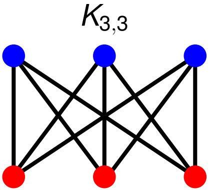




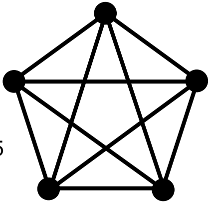
Kuratowski tétel

Tétel

Egy G gráf pontosan akkor síkbarajzolható ha nem tartalmaz se $K_{3,3}$-al, se K_5-tel topologikusan izomorf részgráfot.



K_5



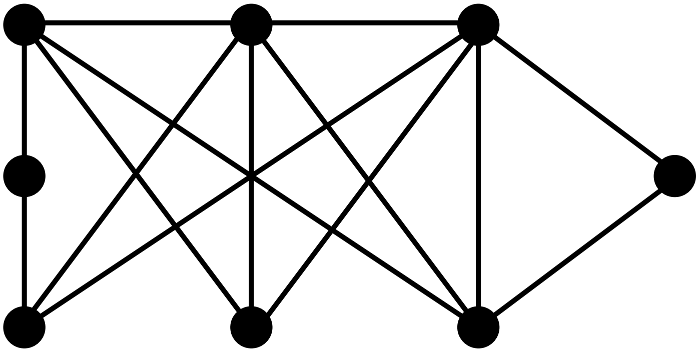
Bizonyítás: $\Longleftarrow$: Nehéz, nem bizonyítjuk.

$\Longrightarrow$: Ha G gráf síkbarajzolható akkor nyílván minden részgráfja is síkbarajzolható.

K_5-ről és $K_{3,3}$-ról láttuk, hogy nem síkbarajzolhatóak, így a velük topologikusan izomorf gráfok sem síkbarajzolhatóak. Tehát utóbbiak nem lehetnek G részgráfjai.

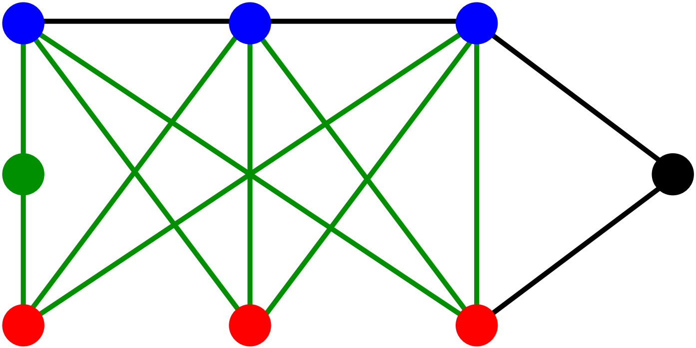
Példa Kuratowki tétel alkalmazására

Kérdés: Síkbarajzolható-e az alábbi gráf?



Példa Kuratowki tétel alkalmazására

Kérdés: Síkbarajzolható-e az alábbi gráf?



Válasz: Tartalmaz $K_{3,3}$-al topológikusan izomorf részgráfot.
Ezért Kuratowski tétele miatt nem síkbarajzolható.

Síkbarajzolás egyenes vonalakkal

Fáry-Wagner tétel

Ha G síkbarajzolható gráf, akkor van olyan síkbarajzolása is ahol minden élet egyenes szakasszal rajzolunk le.