A számítástudomány alapjai 2022. I. félév

7. gyakorlat. Összeállította: Fleiner Tamás (fleiner@cs.bme.hu)

Tudnivalók

Def: *Lineáris egyenletrendszer* alatt véges sok olyan egyenletet értünk, amiben ismeretlenek konstansszorosainak összege konstanssal egyenlő. A lineáris egyenletrendszer *megoldása* olyan hozzárendelés, úgy rendel ami egy-egy értéket minden ismeretlenhez, hogy az egyenletrendszer minden egyenlete igaz legyen erre az értékadásra.

Def: Lineáris egyenletrendszer *kibővített együtthatómátrixa* olyan mátrix, aminek i-dik sora az i-dik egyenletnek felel meg, és az egyes ismeretlenek együtthatóit ill. az egyenlet jobb oldalán álló konstanst tartalmazza minden értelmes i esetén.

Def: Egy tetsz. M mátrixon *elemi sorekvivalens átalakítás (ESÁ)* az alábbiak valamelyike:
(1) az i-dik és j-dik sorok cseréje, (2) az i-dik sor egy $\lambda \neq 0$ konstanssal történő végigszorzása ill.
(3) az i-dik sor helyettesítése az i-dik és j-dik sorok összegével valamely i és j esetén.

Megjegyzés: Néha egy csupa0 sor törlését (vagy hozzáadását) is szokás ESÁ-nak tekinteni. Sorekvivalens átalakítás (de nem elemi, hiszen ESÁ-ok egymásutánjakén megkapható) ha az i-dik sort helyettesítjük az i-dik sor és a j-dik sor λ-szorosának összegével.

Megfigyelés: A kibővített együtthatómátrixon elvégzett ESÁ nem változtat a megfelelő lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmazán.

Def: Az M mátrix *lépcsős alakú (LA)*, ha (1) minden sor első nemnulla eleme (vezér)1-es (v1) ill. (2) bármely két v1 esetén a lejjebb álló v1 jobbra esik a feljebb álló v1-től.

M *Redukált lépcsős alakú (RLA)*, ha (1) M LA és (2) M-ben minden v1 felett csak 0-k állnak.

Def: A kib. egyhómxban *tilos sor* a $(0, \ldots, 0, x)$ típusú sor $x \neq 0$ esetén.

Ha a kib. egyhómx RLA, akkor az x_i ismeretlen *kötött változó*, ha az x_i-hez tartozó oszlopban van v1. Ha nincs, akkor x_i *szabad paraméter.*

Állítás: Tfh egy lineáris egyenletrendszer M kib. egyhómxa RLA. Ekkor
(1) M minden sora vagy a $0 = 0$ azonosságnak vagy a $0 = 1$ ellentmondásnak vagy a v1-hez tartozó változó (szabad paramétereket esetlegesen felhasználó) értékadásának felel meg.
(2) Ha M tartalmaz tilos sort, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.
(3) Ha M nem tartalmaz tilos sort, akkor a szabad paraméterek tetsz. értékadásá mellett az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Ha van szabad paraméter, a megoldások száma ∞.

Köv.: A lineáris egyenletrendszer megoldása egy RLA kib. egyhómx-szal felírt egyenletrendszer.

Cél: A lineáris egyenletrendszer kib. egyhómx-át ESÁ-ok segítségével RLA-ra alakítani.

Gauss-elimináció:
Input: $M \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrix. Output: Olyan $M' \in \mathbb{R}^{n\times k}$ LA mátrix, ami M-ből ESÁ-okkal kapható.
Működés: Az eljárás fázisokból áll, az i-dik fázisban az i-dik sor vezéregyesét és az alatta álló 0-kat alakítjuk ki. Konkrétan: Kiválasztjuk az első olyan oszlopot, ami az $(i-1)$-dik sor alatt tartalmaz nemnullát. Ha nincs ilyen sor vagy oszlop, az algoritmus véget ér. Különben egy esetleges sorcserével elérjük, hogy az i-dik sor es az iménti oszlop metszetében nemnulla álljon. Esetleges konstanssal szorzással elérjük, hogy megjelenjen az i-dik sorban a v1. Az i-dik sor alkalmas konstansszorosait a lejjebb álló sorokhoz adva a v1 alatti elemek kinullázhatók.

LA mátrix RLA-vá alakítása: A v1 alatti elemekhez hasonlóan a v1 feletti elemek kinullázhatók a v1 sora alkalmas konstansszorosának a v1 felett álló sorokhoz történő hozzáadásával.

Állítás: Ha egy lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor az egyenletek száma legalább annyi, mint az ismeretleneké.

Gyakorlatok

1. A jobb oldalon látható mátrixot ESÁ-ok segítségével alakítsuk RLA mátrixszá úgy, hogy először elvégezzük a Gauss-eliminációt.
$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & 11 & -2 & -8 & 9 \\ 4 & 9 & -14 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$
2. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket. A második egyenletrendszer megoldásait minden valós p esetén határozzuk meg.

$$\begin{aligned} 2x_1+10x_2-2x_3+4x_4 &= 2 \\ 5x_1+23x_2-9x_3+12x_4 &= -1 \\ -x_1+11x_3-2x_4 &= 34 \\ 3x_1+17x_2+x_3+7x_4 &= 21 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1+10x_2-2x_3+4x_4 &= 2 \\ 5x_1+23x_2-9x_3+12x_4 &= -1 \\ -x_1+11x_3-2x_4 &= 34 \\ 3x_1+17x_2+x_3+7x_4 &= p \end{aligned}$$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számok körében. A második egyenletrendszer megoldásait minden valós p esetén határozzuk meg.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 14 \\ 2x_1+6x_2+10x_3+6x_4+2x_5 &= 28 \\ x_1+5x_2+9x_3+2x_4+6x_5 &= 16 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1+5x_2-1x_3+4x_4 &= 2 \\ x_1+8x_2+8x_3-2x_4 &= 14 \\ 3x_1+13x_2-9x_3+p\cdot x_4 &= -2 \\ 2x_1+14x_2+10x_3+(p-3)\cdot x_4 &= 23 \end{aligned}$$

4. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek összes megoldását minden pozitív egész n esetén.

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n &= n \\ x_1+2x_2+2x_3+\ldots+2x_n &= n-1 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1+x_2 &= 1 \\ x_2+x_3 &= 1 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ x_{n-1}+x_n &= 1 \\ x_n+x_1 &= 1 \end{aligned}$$

5. Tfh egy lineáris egyenletrendszer megoldható, és a megoldása során az derül ki, hogy x_1 kötött paraméter. Hogyan lehet eldönteni, hogy van-e olyan felírása a megoldásnak, amiben x_1 szabad paraméter? Adjunk példát olyan felírásra, amikor x_1 sosem lehet szabad paraméter, és mutassunk olyan példát is, ahol lehet.
6. Tegyük fel, hogy egy lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Elképzelhető-e, hogy az egyenletek jobb oldalain álló konstans értékek alkalmas megváltoztatásával olyan egyenletrendszer kapható, aminek (a) nincs megoldása ill. (b) végtelen sok megoldása van?
7. Lehetséges-e a jobb oldalon álló mátrixot ESÁ-okkal RLA mátrixszá alakítani úgy, hogy a sor szorzásához használt λ szorzóval csak egész szám lehet, a másik két ESÁ pedig korlátozás nélkül használható? $\begin{pmatrix} 3 & 11 & 85 & 4 \\ 2 & 9 & 79 & -2 \\ 0 & 3 & 40 & 0 \end{pmatrix}$
8. Homogén lineáris egyenletrendszer alatt olyan lineáris egyenletrendszert értünk, amelyikben minden, az egyenletek jobb oldalán álló konstans 0-val egyenlő. A lineáris egyenletrendszerek esetén lehetséges alábbi három alternatíva közül melyik valósulhat meg egy homogén lineáris egyenletrendszer esetén? (a) nincs megoldás, (b) pontosan egy megoldás van (c) végtelen sok megoldás van.

   Tegyük fel, hogy adott egy lineáris egyenletrendszer egy konkrét megoldása. Bizonyítsuk be, hogy az egyenletrendszer megoldásai pontosan azok az értékadások, amik úgy kaphatók, hogy ehhez a konkrét megoldáshoz hozzáadjuk a megfelelő homogén lineáris egyenletrendszer egy megoldását.
9. Tegyük fel, hogy az M mátrix minden eleme egész szám, és sorszorzást csak akkor szabad végezni, ha a λ szorzó egész szám. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas ESÁ-ok elvégzésével elérhető, hogy bármely két sor esetén a lejjebb álló sor több nullával kezdődjön, mint a feljebb álló.
10. Tegyük fel, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretleneket tartalmazó lineáris egyenletrendszer megoldható. Bizonyítsuk be, hogy x_i pontosan akkor szabad paraméter, ha van két különböző olyan megoldása az egyenletrendszernek, amiben x_i különböző értékeket kap, de $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n$ mindkét megoldásban ugyanazokat az értékeket kapják.
11. Igaz-e, hogy minden $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrixhoz pontosan egy olyan RLA mátrix van, ami M-ből ESÁ-okkal kapható? (*)
12. Tervezzünk hatékony eljárást, ami két $n \times k$ méretű mátrixról eldönti, hogy megkapható-e az egyik mátrix a másikból ESÁ-ok alkalmas egymásutánjával. (*)