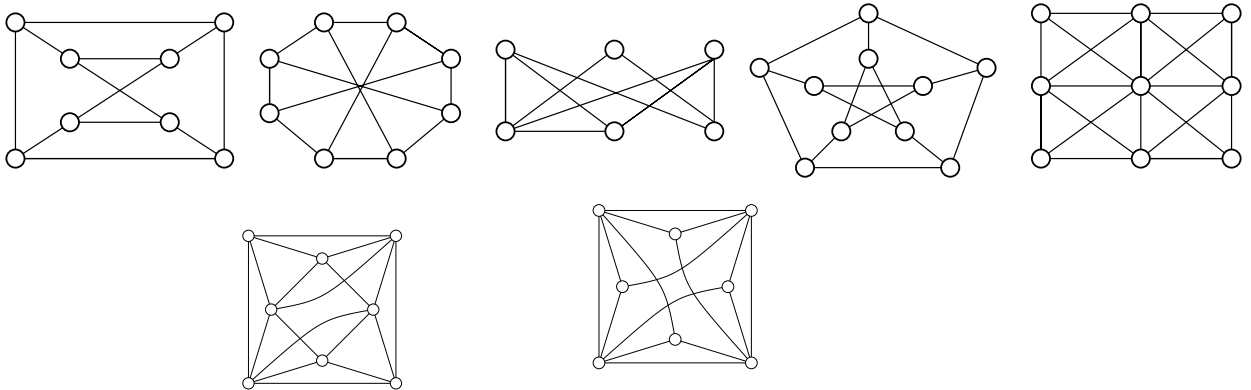


# A számítástudomány alapjai

Papp László <lazsa@cs.bme.hu>

2022. ősz 6. gyakorlat

1. Egy 20-csúcú poliédernek 12 lapja van, mindegyik  $k$  oldalú sokszög. Mennyi a  $k$  értéke?
2. Tegyük fel, hogy  $G$  olyan összefüggő, síkbarajzolt gráf, amelynek 14 tartománya van, minden csúcsának fokszáma 3 vagy 6, és a harmadfokú csúcsok száma kétszerese a hatodfokúakénak. Hány csúcsa és hány éle van  $G$ -nek?
3. Hány csúcsa van egy olyan öf síkbarajzolható gráfnak, ha tudjuk, hogy egy síkbarajzolásának három háromszöglapja, három négyszöglapja és egy ötszöglapja van? (Mivel a külső tartomány nem kitüntetett ezért az ezekben már benne van.)
4. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű  $G$  gráfnak legalább 11 csúcsa van, akkor  $G$  és  $\overline{G}$  közül legalább az egyik nem síkbarajzolható.
5. Egy mezőn  $k$  ház és  $k$  kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (még hozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
6. Síkbarajzolhatók-e a  $K_6, K_{4,2}, K_{4,3}, K_5 - e, K_{3,3} - e$  gráfok? Hát az alábbiak?



7. Legyenek  $v_2, v_3, \dots, v_7, v_8$  a  $G$  gráf csúcsai, és pontosan akkor legyen  $v_i$  és  $v_j$  között él, ha  $i^2 - 1$ -nek és  $j^2 - 1$ -nek van 1-nél nagyobb közös osztója. Rajzoljuk le  $G$  egy áttekinthető diagramját, valamint döntsük el, síkbarajzolható-e  $G$ . (ppZH '12)
8. Van-e olyan 9-pontú  $G$  gráf, hogy sem  $G$  sem a  $\overline{G}$  komplementere nem síkbarajzolható?(V '01)
9. Legfeljebb hány éle és hány tartománya lehet egy olyan egyszerű,  $n$  pontú, síkbarajzolt  $G$  gráfnak, aminek van olyan tartománya, ami  $G$  minden csúcsát tartalmazza a határán?
10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű  $G$  gráf síkbarajzolható, akkor a pontjainak legfeljebb a fele lehet 10-nél nagyobb fokú. (pZH '14)

11. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
12. Abszurdisztán adóhivatala egy papírfecsin szerzett értesülés nyomán szeretne felderíteni bizonyos ÁFA-csalásokat. A szövevényes bűnügy felgöngyölítéséhez elkészítettek egy  $G$  gráfot, melynek pontjai a gyanús cégeknek felelnek meg és  $G$  két csúcsa között akkor fut él, ha a két szóban forgó cég egyike számlát állított ki a másiknak. Az adatok gondos analízise nyomán az derült ki, hogy minden gyanús cégnek legalább hat másik gyanús céggel volt már közös számlázási ügye. A nyomozás sikerének pedig az a kulcsa, hogy ez a  $G$  gráf átlátható legyen, azaz, hogy  $G$ -t úgy lehessen lerajzolni egy dátummal, pecséttel és aláírással ellátott okmányra, hogy élek belső pontban ne keresztezzék egymást. (Ha ugyanis eredménytelen marad a próbálkozás, akkor sajnos képtelenség felderíteni az csalásokat.) Sikerül-e vajon nyakon csípni az elvetemült bűnözőket? (ZH '14)