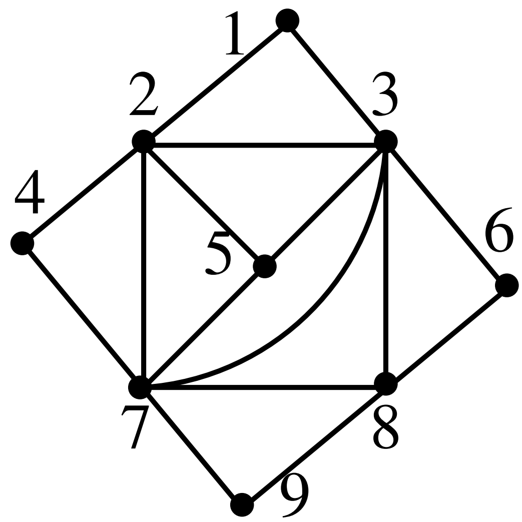
A számítástudomány alapjai

Papp László <lazsa@cs.bme.hu>

2022. ősz 5. gyakorlat

1. A jobb oldali gráfban van-e Euler-körséta illetve Euler-séta? (Hatvan ZH '17)



2. Van-e olyan 222 pontú G gráf, hogy G-nek is és komplementerének, $\overline{G}$-nek is van Euler-sétája?

3. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler-körsétája, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?

4. Mutassuk meg, hogy ha G egy 12-reguláris gráf, akkor élei pirosra és zöldre színezhetők úgy, hogy minden csúcsból pontosan 6 piros és 6 zöld él induljon.

5. Igazoljuk, hogy minden 8-reguláris gráfnak van 4-reguláris és 2-reguláris olyan részgráfja is, ami élek törlésével keletkezik.

6. A fenti gráfban van-e Hamilton-kör illetve Hamilton-út? (Hatvan ZH '17)

7. Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?

8. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G - v$ ill. a $G - e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.

9. 222 politikus mindegyike legalább 133 másikat ismer, akik közül legfeljebb 22 -t utál. Az ismeretség és az utálat is kölcsönös. Bizonyítsuk be, hogy a 222 politikus úgy tudja élő lánccal körülvenni a Tüskecsarnokot, hogy a szomszédos láncszemek ismerjék, de ne utálják egymást.

10. Legyen G 10 csúcsú, egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G -nek nincs Hamilton-köre, ha a csúcsok fokszámai pedig rendre 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 9, 9, 9. (pZH '16)

11. Bejárható-e a 4×4-es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? (A huszár mindig egy 3×2-es téglalap egyik csúcsából az átellenes csúcsába lép.)

12. Ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk.

13. Legyen G a $\{p_1, p_2, \ldots, p_{2001}\}$ ponthalmazon az az egyszerű gráf, amire $p_i p_j \in E(G)) \iff |i - j| \leq 2$. Van-e G-ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör ill. Hamilton-út? (V '01)

14. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Igaz továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön. (ZH '00)

15. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$-pontú G gráfban van Hamilton-kör, akkor kiválasztható G-nek néhány diszjunkt éle úgy, hogy G minden pontja végpontja valamelyik kiválasztott élnek.

16. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0, 1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0, 0, 0, 1)$ és $(0, 1, 0, 1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Euler-körsétája ill. Hamilton-köre?(ZH '01)

17. A bölcsiben nyuszis-cicás dominókkal játszanak a gyerekek: a 4-féle nyuszi és 6-féle cicából alkotott 24 lehetséges párnak felelnek meg a készletben található kövek. Lehet-e a dominókból olyan kört alkotni, ahol az egymást követő köveken egymás mellett álló képek megegyeznek és az összes dominót tartalmazzák?(*)

18. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy G minden csúcsának legalább n szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy ha G minden élének ki szeretnénk választani legalább egy végpontját, akkor G-nek legalább n csúcsát kell kiválasztanunk. (ZH '99)

19. Tegyük fel, hogy G öf gráf és K egy olyan köre G-nek, aminek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja. Bizonyítsuk be, hogy K a G Hamilton-köre.

20. A G egyszerű gráfnak $2n + 1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út! (ZH '01)