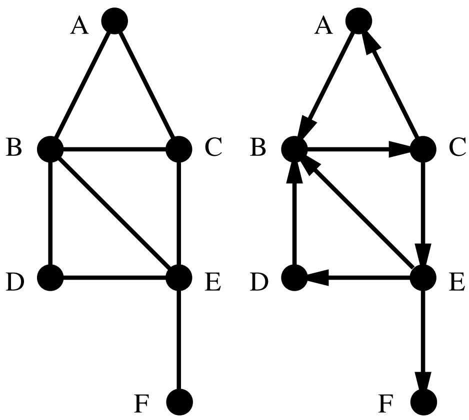
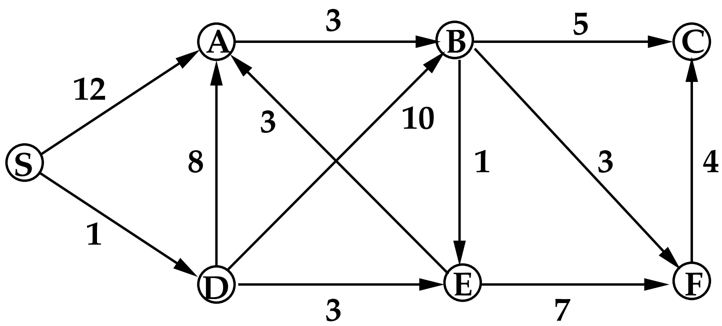
A számítástudomány alapjai

Papp László <lazsa@cs.bme.hu>

2022. ősz 3. gyakorlat



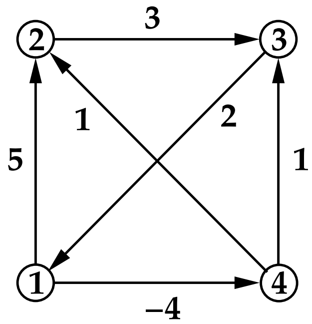
1. A jobb oldali irányítatlan illetve irányított gráfban végezzük el a szélességi bejárást az A csúcsokból indulva! Adjuk meg a bejárás fáját! Mekkora a $d(A, F)$, azaz A és D távolsága, ebben az irányítatlan illetve irányított gráfban?
2. Tegyük fel, hogy a G irányítatlan, egyszerű gráf tetszőleges szélességi kereséssel kapott feszítőfája csillag. Mit lehet mondani G-ről?
3. Adjunk hatékony algoritmust (gyors módszert), aminek a bemenete egy n csúcsú összefüggő irányítatlan gráf, a kimenet pedig egy olyan gráfcsúcs, amiből minden más csúcs lefeljebb $n/2$ élű úton elérhető.
4. Az alábbi gráfban határozzuk meg a legrövidebb S-ből kiinduló utak hosszait! Adjunk meg egy legrövidebb SB utat is!

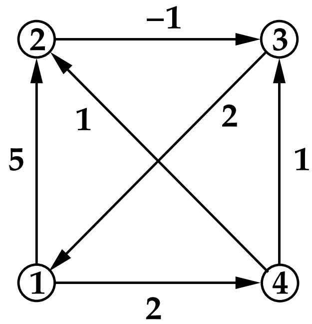


5. Legyen $G = (V, E)$ (irányított) gráf, $\ell : E \to \mathbb{R}^+$ nemnegatív élhosszfüggvény és legyenek u, v, w a G csúcsai. Igazak-e az alábbi állítások?
   (a) Ha P a G egy legrövidebb uv útja és w csúcsa P-nek, akkor a P út u-tól w-ig tartó ill. w-től v-ig tartó részei a G egy legrövidebb uw- ill. wv-útját alkotják.
   (b) Ha P_1 és P_2 a G egy legrövidebb uw- ill. wv-útja, akkor a P_1 és P_2 egymás után fűzése a G egy legrövidebb uv-útja lesz.
6. Adott egy $G = (V, E)$ gráf, egy $\ell : E \to \mathbb{R}^+$ nemnegatív élhosszfüggvény valamint egy $e = uv \in E$ él. Javasoljunk gyors eljárást annak a maximális λ értéknek a meghatározására, amennyivel G két csúcsának a távolsága megnövekszik akkor, ha töröljük az e élt G-ből.

7. Legyen $V(G) = \{v_3, v_4, \ldots, v_{10}\}$, és $v_i v_j \in E(G)$, ha i és j nem relatív prímek, azaz van 1-nél nagyobb közös osztójuk. Legyen a $v_i v_j$ él hossza $\min(i, j) - 1$. Határozzunk meg a v_5 csúcsból minden más csúcsba egy-egy legrövidebb utat, ha van. (pZH '14)

8. A jobboldalt megadott élhosszfüggvények konzervatívok-e? Határozzuk meg a csúcsok 1-es csúcstól vett távolságát arra a megadott élhosszfüggvényre nézve amelyik konzervatív! Az algoritmus futása során az élek rögzített sorrendje legyen $\{2,3\}, \{1,2\}, \{4,2\}, \{3,1\}, \{4,3\}, \{1,4\}$! (Csak, hogy könyebb legyen közösen ellenőrizni.)





9. Legyen adott a $G = (V, E)$ gráf élein egy $\ell : E \to \mathbb{R}$ hosszfüggvény. Igaz-e, hogy ha P a G egy legrövidebb uv-útja az ℓ hosszfüggvényre, akkor P egyúttal legrövidebb út az ℓ' hosszfüggvényre is, ahol $\ell'(e) = \ell(e)^2$ teljesül G minden e élére? (ppZH '14)

10. Forintot szeretnénk különféle valutákra átváltani. Külföldön élő ismerőseink révén nem csak forintot, hanem számos más valutát is közvetlenül át tudunk váltani bizonyos valutákra. A cél, hogy esetleg ilyen átváltások felhasználásával minél jobb árfolyamot érjünk el a forintunk konverziója során. E célból elkészítettünk egy irányított gráfot, aminek a csúcsai az egyes valutáknak, az élek pedig az egyes közvetlen tranzakcióknak felelnek meg. Minden uv élhez ismert az adott váltásnál alkalmazott árfolyam, azaz, hogy hány egységet kell fizetnünk az u pénznemben a v pénznem egy egységéért. Adjunk hatékony módszert arra, hogy meghatározzuk, legfeljebb mennyit kaphatunk az egyes valutákból 1 Ft-ért, ill. határozzuk meg azt is, milyen átváltásokat kell ehhez végeznünk.

11. (*) Adott $n \times k$ méretű táblázat minden mezőjében 0 vagy 1 áll. Találjunk a táblázat bal felső sarkától a jobb alsó sarokig egy mezőhatárok mentén jobbra és lefelé haladó olyan utat, amire igaz, hogy a vonal alatti 1-esek és a vonal feletti 0-k számának összege a lehető legkisebb. Hogyan érdemes eljárni?

    (Segítség: alighanem valamiféle gráfban kéne legrövidebb utat keresni.)

12. Az alábbi gráfokban az élekre írt számok az adott él hosszát jelentik. Órán tanult módszer felhasználásával határozzunk meg minden e-től különböző v csúcsra egy legrövidebb ev utat. (ZH '16)