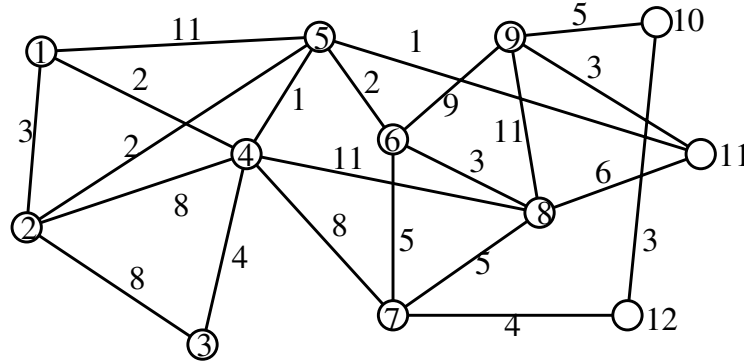


A számítástudomány alapjai

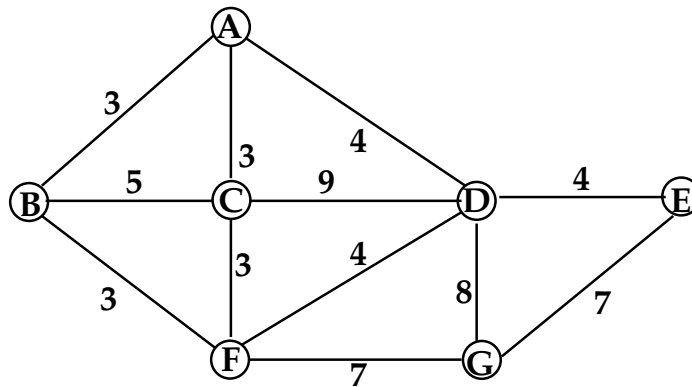
Papp László <lazsa@cs.bme.hu>

2022. ősz 2. gyakorlat

1. Az ábrán látható gráfban keressünk minimális költségű feszítőfát! Hány ilyen van?

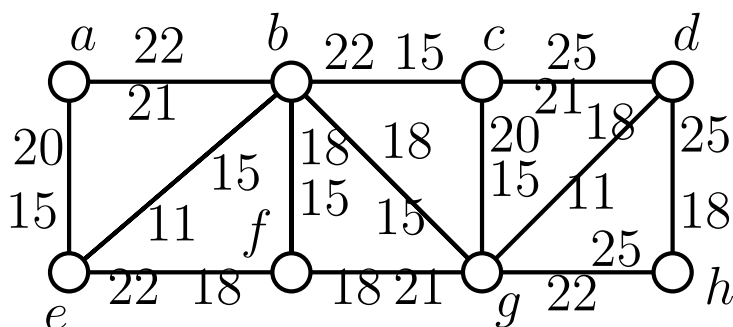


2. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy G minden egyes minimális költségű F feszítőfája outputja lehet a Kruskal algoritmusnak alkalmas (költség szerint monoton növekvő) élsorrend esetén.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ gráf minden élének különböző a költsége, akkor G minimális költségű feszítőfája egyértelmű.
4. Az alábbi gráfban a csúcsok falvakat, az élek pedig tervezett gázvezetéseket jelölnek. Az élekre írt számok az adott vezeték megépítésének a költségét jelölik milliárd forintban. A helyi gázszolgáltató egy összes falut összekötő, összefüggő és lehető legolcsóbb gázvezeték hálózatot fog megépíteni. Mennyi pénzbe fog kerülni egy ilyen hálózat? Melyik tervezett gázvezeték fog biztosan megépülni? (Hatvan PótZH '18)

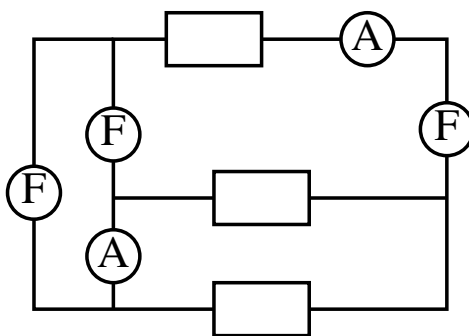


5. A kormány tendert ír ki n településnek a helyi vízműre történő rácsatlakoztatására. Minden ajánlat két település (vagy egy település és a vízmű) között kiépítendő vezeték költségét tartalmazza. Tudjuk, hogy a kormány úgy választja ki a megépítendő vezetéseket és az azokat építő egyes vállalkozásokat, hogy a lehető legolcsóbban csatlakozzon az n település a vízműhöz. Cégünk különféle homályos üzletek nyélbeütésével igen olcsón meg tudná építeni a Rátótot és Piripócsot összekötő vezetéket, ráadásul minisztériumi kapcsolatunk, Mutyi bácsi elárulta nekünk az összes beérkezett ajánlatot. Hogyan árazzuk a saját Rátót-Piripócs ajánlatunkat, hogy a lehető legnagyobbat szakítsuk?

6. Az alábbi ábrán látható $G = (V, E)$ gráf élei a felújítandó útszakaszokat jelentik. Minden élén két költség van: az olcsóbbik az egyszerű felújítás költsége, a drágább pedig ugyanez, kerékpárút építéssel. A cél az összes útszakasz felújítása úgy, hogy összefüggő kerékpárúthálózat épüljön ki, amelyen G minden pontja elérhető. Határozzunk meg egy lehető legolcsóbb felújítási tervet, ami teljesíti ezt a feltételt. (ZH'15)



7. Az alábbi villamoshálózatnak adjuk meg egy normál fáját! Ez egyértelmű-e?



8. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ költségfüggvény. Tegyük fel, hogy ismerünk a $G - e$ gráfon egy minimális költségű F feszítőfát. Határozzuk meg a G gráfnak egy olyan minimális költségű feszítőfáját, amelynek F -vel a lehető legtöbb közös éle van.
9. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő egyszerű gráf, amire igaz a következő: G -ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G -ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.) (V '99)