

A számítástudomány alapjai

Papp László <lazsa@cs.bme.hu>

2022. ősz 1. gyakorlat

1. Határozzuk meg az összes olyan véges, egyszerű G gráfot, aminek nincs két azonos fokú csúcsa.
2. Mutassuk meg, hogy ha G véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros.
Megjegyzés: Ha G nem véges, akkor ez nem igaz, de végtelen gráfokról nem fogunk beszélni.
3. Van-e olyan egyszerű gráf, aminek a fokszámai a.) $1, 2, 2, 3, 3, 3$ ill. b.) $1, 1, 2, 2, 3, 4, 4$?
4. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfnak 11 csúcsa és 45 éle van, akkor G -nek van olyan csúcsa, ami legalább 9-edfokú.
5. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!
6. Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amelyben a legrövidebb kör hossza pontosan 4 és minden pont harmadfokú? (ZH '98)
7. Ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatók úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör.
8. Ketten a következő játékot játsszák. Adott n pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúz egy élet. Az veszít, aki kört hoz létre. A kezdő vagy a másodiknak lépő játékos nyer, ha mindketten a lehető legjobban játszanak? (V '00)
9. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$? (V '00)
10. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélek. Mi lehet ez a két szám? (V '99)
11. A G egyszerű gráfnak e olyan éle, aminek elhagyásával fát kapunk. Mutassuk meg, hogy G -nek még legalább két másik éle is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.
12. Legyen T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 a T_1 egy tetszőleges éle. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik T_2 -nek egy e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.
13. Legyenek e, f és g a G egyszerű, összefüggő gráf különböző élei. Tegyük fel, hogy a G gráf összefüggő marad, bármely élet is hagyjuk el, ám a $G - e - f$ és a $G - e - g$ gráfok egyike sem összefüggő. Igazoljuk, hogy ekkor a $G - f - g$ gráf sem összefüggő.
14. A G egyszerű gráfnak $2k$ pontja van, minden pontjának foka legalább $k - 1$, és G -nek létezik egy legalább k -adfokú pontja. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő. (V '02)

15. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melyben a pontpárok távolságai közül a legnagyobb hárommal egyenlő? (Két pont távolságán a köztük levő legrövidebb úton található élek számát értjük.) (V '99)
16. Rajzoljuk le azt a gráfot, melynek pontjai a 4 hosszú nullákból és egyesekből álló sorozatok és két csúcs akkor van éllel összekötve, ha egyik a másikból egy „forgatással” megkapható, azaz ha az egyik a (b_1, b_2, b_3, b_4) akkor a másik a (b_2, b_3, b_4, b_1) sorozathoz tartozó pont. (ZH '00)
17. Hány olyan, páronként nem izomorf, 6 pontú, összefüggő, egyszerű gráf létezik, melyben két másodfokú és négy harmadfokú pont van? (ZH '00)