A számítástudomány alapjai 2022. I. félév

13. gyakorlat. Összeállította: Papp László (lazsa@cs.bme.hu)

1. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi mátrixoknak! Ha igen, akkor számítsuk is ki!

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \\ 2 & -5 & 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Legyen A $n \times n$-es mátrix, $x, y \in \mathbb{R}^n$ pedig tetszőleges oszlopvektorok. Bizonyítsuk be, hogy ha $x \neq y$ de $Ax = Ay$, akkor $detA = 0$.

3. Legyen A a következő mátrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

   (a) Adjunk meg egy olyan B mátrixot amire $A \cdot B$ a 2×2-es egységmátrix.

   (b) Létezik-e olyan C mátrix amire $C \cdot A$ a 3×3-as egységmátrix?

4. Az alábbi A mátrixra teljesül, hogy $A^3 = E$ (ahol E a 3×3-as egységmátrix).

$$\begin{bmatrix} 9 & 13 & 13 \\ 1 & 3 & 2 \\ -8 & -13 & -12 \end{bmatrix}$$

   Határozzuk meg ezen mátrixegyenlet felhasználásával az A inverzének jobb alsó elemét anélkül, hogy kiszámolnánk az A^{-1} inverzmátrixot.

5. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix amire $A^{49} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

6. A 2×3-as A mátrixnak nincs negatív eleme. Tudjuk ezen kívül, hogy az $A \cdot A^T$ mátrix bal felső eleme 0, a jobb alsó eleme pedig 14, továbbá az $A^T \cdot A$ mátrix bal felső eleme 4, a jobb alsó eleme pedig 9. Határozzuk meg az A, $A \cdot A^T$ és $A^T \cdot A$ mátrixokat.

7. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezésre $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   illetve

   $f\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az f lineáris leképezés mátrixát és adjuk meg a $f\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektort!