A számítástudomány alapjai 2022. I. félév

11. gyakorlat. Összeállította: Papp László (lazsa@cs.bme.hu)

1. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ és $B == \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   Az alábbi mátrixműveletek közül melyek végezhetőek el? Amelyek elvégezhetőek, azokat végezzük is el!

   a) $2A + 3B$ b) $A \cdot B$ c) $B \cdot A$ d) $A \cdot B + 2B$ e) $B \cdot B^T$

2. Döntsük el, hogy az alábbi egyenlőségek igazak-e bármilyen $n \times n$-es A és B mátrixokra. Az igaz egyenlőségeket lássuk be, a hamisakra adjuk ellenpéldát. (E az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli.)

   a) $AB+B = (A+E)B$ b) $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$ c) $(A+E)^2 = A^2+2A+E$

3. Számítsuk ki az alábbi mátrixokat. (A^n az az n tényezős szorzat, amelynek minden tényezője A.)

   a) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{2022}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{2023}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{2023}$

4. A 4×4-es A és B mátrixok i. sorának és j. oszlopának metszéspontjában lévő elemet jelölje $a_{i,j}$ illetve $b_{i,j}$. Tegyük fel, hogy minden $1 \leq i, j \leq 4$ esetén:

   $a_{i,j} = \begin{cases} i+j & \text{ha } j = 1,2 \\ 9-i-j & \text{ha } j = 3,4 \end{cases}$ $b_{i,j} = \begin{cases} j & \text{ha } i = 1,3 \\ i-j & \text{ha } i = 2,4 \end{cases}$

   Határozzuk meg az $A \cdot B$ mátrixot!

5. Lineáris leképezések-e az alábbi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények? Ha igen, akkor írjuk fel a mátrixukat is!

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f : (x, y, z) \to (x - y + z, x - y + z)$
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ f minden síkvektorhoz az x tengelyre vett tükörképét rendeli.
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ f minden $\underline{v}$ síkvektorhoz azt az x tengelyre eső vektort rendeli, amelynek az első koorinátája a $\underline{v}$ két koordinátája közül a nagyobb.

6. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés a $(2, 6)$ vektorhoz a $(14, 16, 14)$ vektort, az $(1, -3)$ vektorhoz pedig az $(1, -10, -5)$ vektort rendeli.

   (a) Íruk fel az f lineáris leképezés mátrixát!
   (b) Mit rendel f a $(4, -1)$ vektorhoz?
   (c) A p paraméter milyen értékére van olyan $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ vektor amihez f a $(10, -9, p)$ vektort rendeli?

7. Lineáris leképezések-e az alábbi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények? Ha igen, akkor írjuk fel a mátrixukat is!

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ $f(\underline{v})$ utolsó koordinátája $\underline{v}$ koordinátáinak az összege, az eslő három koordinátája pedig megegyezik $\underline{v}$ megfelelő koordinátáivalá.
   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(x, y, z) \to (|x|, |y|, |z|)$.