A számítástudomány alapjai 2022. I. félév

10. gyakorlat. Összeállította: Papp László (lazsa@cs.bme.hu)

1. Határozzuk meg az alábbi permutációk inverziószámát:

   a) 124356 b) 123456 c) 621345 d) 635214

2. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsának az értékét a definíció szerint!

   a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

3. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsának az értékét a definíció szerint!

   a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 9 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

4. Határozzuk meg az alábbi determinánsok értékét.

   a) $\begin{vmatrix} 3 & 15 & 9 & 3 \\ -2 & -10 & 1 & -6 \\ 1 & 5 & 7 & -3 \\ 2 & 13 & 12 & -10 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 9 & -8 \\ -4 & 4 & 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \\ 1 & 6 & 11 & 16 & 21 & 26 \\ 1 & 7 & 13 & 19 & 25 & 31 \end{vmatrix}$

5. Határozuk meg az alábbi determináns értékét a kifejtési tétel segítségével.

   $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & \pi \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

6. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét minden p valós paraméter esetén.

   $\begin{vmatrix} \mathrm{p} & 1 & 3 & 7 \\ 1 & \mathrm{p} & 8 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & \mathrm{p} & \mathrm{p} \end{vmatrix}$

7. A 4x4-es A mátrix i. sorának és j. oszlopának kereszteződésében található elem az $a_{i,j}$ (minden $1 \leq i, j \leq 4$ esetén). Határozzuk meg az A determinánsát, ha

   a) $a_{i,j} = \begin{cases} i, & \text{ha } i = j \\ 1, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$ b) $a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i = j \\ 1, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$ c) $a_{i,j} = i^2 j^2 + 1$

   Határozzuk meg ezen determinánsokat akkor is ha A egy 99x99-es mátrix!

8. Egy $n \times n$-es A mátrix minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével. Mi lesz az így kapott n^2 darab szorzat összege?

9. Bizonyítsuk be, hogy

   $$\begin{vmatrix} 1129 & 1220 & 1230 & 1200 \\ 1000 & 1119 & 1220 & 1320 \\ 1230 & 2330 & 1229 & 1220 \\ 1230 & 1230 & 9990 & 9999 \end{vmatrix} \neq 0.$$