

# A Számítástudomány alapjai

1. ZH 2012. X. 11. 8<sup>15</sup>

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

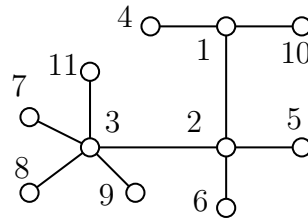
Kérjük, minden résztvevő **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában, valamint **gyakorlatvezetője nevét** és a **tankörének számát vagy gyakorlatának idopontját** a dolgozat *első* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan és helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a padon vagy a hallgató kezében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

## Feladatok

- Szerencsére elmúlt a veszély, pánikra semmi ok. Luke Skywalker ugyan kivont lézerkarddal ment órára a jediképzőben, de a birodalmi gárda sem teketóriázott: még kicsöngetés előtt sikerült megelőznie a fejvesztett zűrzavart. A hatalmas sikert természetesen sajtótájékoztató követte, amire a birodalmiak három tagú vezetése terepszínű álcaruházatban, 10 feketébe öltözött elitgárdista társaságában vonult be. Itt minden nyitott kérdés megnyugtatóan tisztázódott, csupán egyetlen egy maradt. Hányféle sorrendben történhet a bevonulás, ha a szigorú előírás szerint 3 gárdista – 1 vezető – 2 gárdista – 1 vezető – 2 gárdista – 1 vezető – 3 gárdista sorrendben kell vonulniuk? Segítsünk nekik.
- A ruletten egy pörgetés eredménye egy 0 és 36 közötti egész szám (a határokat megengedve). Hányféle olyan 10 pörgetésből álló sorozat lehetséges, ami tartalmaz két azonos eredményű pörgetést?
- Adott  $n + 2$  rendezett tömb, méreteik rendre  $1, 1, 2, 4, 8, \dots, 2^n$ . Adjunk olyan eljárást, ami legfeljebb  $2^{n+2}$  összehasonlítással rendezi a tömbökben tárolt rekordokat.
- Kupac-e az 

1	4	2	8	3	7	5
---	---	---	---	---	---	---

 tömb?
- Legfeljebb hány olyan egymással nem izomorf, 10 pontú gráf adható meg, amelyek egyetlen 9-fokú és 9 db 3-fokú csúcsot tartalmaznak?
- Határozzuk meg azt az  $F'$  fát, aminek Prüfer-kódja az ábrán látható  $F$  fa Prüfer-kódjának fordítottja, tehát amit úgy kapunk, hogy  $F$  Prüfer-kódját jobbról balra olvassuk.



*Gyakorlatvezetők és gyakorlatok* Fleiner Tamás (11, H QBF10), Nguyen Hai (12, H QBF11), Tikosi Kinga (13, H IB134), Pach Péter Pál (21, H E406; 14 K IB138; 16 Cs IB 138), Bérczi Kristóf (22, H E404; 27, Cs T605), Vidor Sára (23, H IB146), Pácsonyi Imre (15, K IB139), Papp Pál András (24, K IB140), Varga Kitty (17, Cs IB139), Drótos Márton (25, Cs IB140), Salánki Ági (26, Cs, IB147), Tassy Gergely (28, Cs R511)

Jó munkát!

# A Számítástudomány alapjai

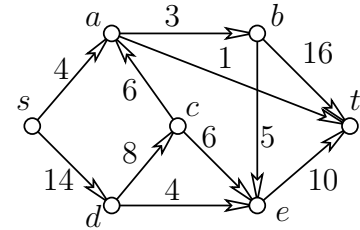
2. ZH 2012. XI. 22. 8<sup>15</sup>

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

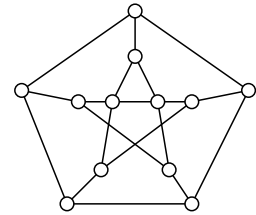
Kérjük, minden résztvevő **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában, valamint **gyakorlatvezetője nevét** és a **tankörének számát vagy gyakorlatának idopontját** a dolgozat *első* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan és helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a padon vagy a hallgató keze ügyében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

## Feladatok

1. Tegyük fel, hogy az egyszerű  $G$  gráfnak 100 csúcsa van, ezek közül  $u$  és  $v$  foka 45, a többi csúcsé pedig legalább 55. Igazoljuk, hogy  $G$ -ben van Hamilton út.



2. Találjunk a fenti ábrán látható hálózat  $st$ -vágásai közül egy olyat, aminek a kapacitása (értéke) minimális.
3. Jelölje  $n \geq 2$  esetén  $G_n$  az a gráf, amit  $C_{2n}$ -ből úgy kapunk, hogy annak átellenes csúcsait éllel összekötjük. Határozzuk meg minden  $n \geq 2$ -re  $G_n$  kromatikus számát,  $\chi(G_n)$ -t.



4. Síkbarajzolható-e a mellékelt ábrán látható 12 csúcsú gráf?
5. Legyenek  $v_2, v_3, \dots, v_7$  a  $G$  egyszerű gráf csúcsai, és pontosan akkor fusson  $v_i$  és  $v_j$  között él, ha  $i^2 - 1$ -nek és  $j^2 - 1$ -nek van 1-nél nagyobb közös osztója. Rajzoljuk le  $G$  egy áttekinthető diagramját, számítsuk ki a  $G$ -ben található független élek ill. független csúcsok maximális számát ( $\nu(G)$ -t és  $\alpha(G)$ -t), valamint a  $G$ -t lefogó pontok ill. élek minimális számát ( $\tau(G)$ -t és  $\rho(G)$ -t).
6. Állapítsuk meg, hogy a 2. feladathoz tartozó ábra meghatározta PERT problémában melyek azok a tevékenységek, amelyeket el tudunk kezdeni a lehető legkorábbi kezdési időpontjuknál valamivel később úgy, hogy ettől a késéstől a teljes feladat végrehajtásához szükséges minimális idő ne növekedjék.

*Gyakorlatvezetők és gyakorlatok* Fleiner Tamás (11, H QBF10), Nguyen Hai (12, H QBF11), Tikosi Kinga (13, H IB134), Pach Péter Pál (21, H E406; 14 K IB138; 16 Cs IB 138), Bérczi Kristóf (22, H E404; 27, Cs T605), Vidor Sára (23, H IB146), Pácsonyi Imre (15, K IB139), Papp Pál András (24, K IB140), Varga Kitty (17, Cs IB139), Drótos Márton (25, Cs IB140), Salánki Ági (26, Cs, IB147), Tassy Gergely (28, Cs R511)

Jó munkát!

# A Számítástudomány alapjai

1. pótZH 2012. XI. 29. 8<sup>15</sup>

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában, valamint **gyakorlatvezetője nevét** és a **tankörének számát vagy gyakorlatának idopontját** a dolgozat *első* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan és helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a padon vagy a hallgató kezében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

## Feladatok

1. A villamosmérnök szak mind az 556 hallgatója két-két ZH-t írt: egyet számítástudományból, egyet pedig analízisből. Számítástudományból senki sem ért el 36 pontnál többet. Bizonyítsuk be, hogy van négy olyan hallgató, akik amellet, hogy ugyanannyi pontot kaptak a számítástudomány ZH-jukra, analízisből is egyforma osztályzatot szereztek.
2. Adjunk olyan eljárást, ami  $2^{n-1} - 1$  összehasonlítással meghatározza egy  $2^n - 1$  különböző rekordot tartalmazó kupacban a legnagyobb elemet.
3. A 

$\sqrt{5}$	2	$\pi$	8	5	$\sqrt{3}$	6	$\sqrt{7}$
------------	---	-------	---	---	------------	---	------------

 tömb összefésüléses rendezéséhez pontosan hány páronkénti összehasonlításra van szükség?
4. Legfeljebb hány olyan egymással nem izomorf, egyszerű, 7 pontú gráf adható meg, amelynek minden csúcsa 4-edfokú?
5. Tegyük fel, hogy a háromszöget nem tartalmazó, irányítatlan, 100 csúcsú  $G$  egyszerű gráf 4-reguláris, azaz minden csúcs fokszáma 4. Hány olyan 3-élű van részgráfja  $G$ -nek, ami út?
6. Legyen  $F$  az a fa, aminek Prüfer-kódja  $(1, 3, 2, 3, 9, 3, 4, 4, 5, 5)$ . Hány komponensre esik szét  $F$ , ha töröljük a 3-as címkéjű csúcsát?

*Gyakorlatvezetők és gyakorlatok* Fleiner Tamás (11, H QBF10), Nguyen Hai (12, H QBF11), Tikosi Kinga (13, H IB134), Pach Péter Pál (21, H E406; 14 K IB138; 16 Cs IB 138), Bérczi Kristóf (22, H E404;27, Cs T605), Vidor Sára (23, H IB146), Páconyi Imre (15, K IB139), Papp Pál András (24, K IB140), Varga Kitty (17, Cs IB139), Drótos Márton (25, Cs IB140), Salánki Ági (26, Cs, IB147), Tassy Gergely (28, Cs R511)

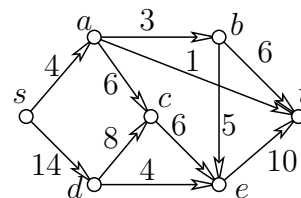
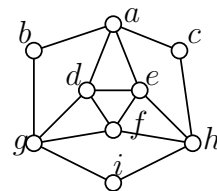
Jó munkát!

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában, valamint **gyakorlatvezetője nevét** és a **tankörének számát vagy gyakorlatának idopontját** a dolgozat *első* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan és helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük. Írószereken és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a padon vagy a hallgató kezében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

## Feladatok

- Van-e az ábrán látható gráfnak Euler ill. Hamilton köre? Ha van, mi abban a csúcsok sorrendje?
- Az ábrán látható gráfon a Dijkstra algoritmus segítségével állapítsuk meg a legrövidebb  $st$ -út hosszát, valamint határozzuk meg, milyen sorrendben határozza meg az algoritmus a  $dist(s, v)$  távolságokat (azaz milyen sorrendben kerülnek véglegesítésre a csúcsok  $s$ -től mért távolságai).
- Bizonyítsuk be, hogy a fenti ábrán látható hálózatban a maximális folyam nagyság (folyamérték) pontosan 14. Elérhető-e két él kapacitásának alkalmas megnövelésével, hogy a maximális folyam nagyság pontosan 16 legyen?
- Egy  $G$  páros gráfot akkor nevezünk *kiegyensúlyozottnak*, ha  $G$  csúcsainak bármely 2 színnel történő kiszínezésekor a két színosztály mérete megegyezik. Igazoljuk, hogy  $r \geq 1$  esetén ha egy  $G$  páros gráf  $r$ -reguláris (azaz  $G$  minden csúcsának foka  $r$ ), akkor  $G$  kiegyensúlyozott.
- Jelölje  $n \geq 3$  esetén  $C'_n$  azt a gráfot, amit úgy kapunk, hogy  $C_n$ -hez hozzávesszük az egymással nem szomszédos  $x$  és  $y$  pontokat, amelyeket összekötünk  $C_n$  minden csúcsával. Határozzuk meg  $C'_n$  kromatikus számát,  $\chi(C'_n)$ -et minden  $n \geq 3$  esetén.
- Jelölje  $n \geq 2$  esetén  $G_n$  az a gráfot, amit  $C_{2n}$ -ből úgy kapunk, hogy annak minden csúcsát éllel összekötjük a vele átellenes csúccsal (ami tehát tőle legtávolabb van a körön). Síkbarajzolható-e a  $G_n$  gráf?



*Gyakorlatvezetők és gyakorlatok* Fleiner Tamás (11, H QBF10), Nguyen Hai (12, H QBF11), Tikosi Kinga (13, H IB134), Pach Péter Pál (21, H E406; 14 K IB138; 16 Cs IB 138), Bérczi Kristóf (22, H E404;27, Cs T605), Vidor Sára (23, H IB146), Pácsonyi Imre (15, K IB139), Papp Pál András (24, K IB140), Varga Kitty (17, Cs IB139), Drótos Márton (25, Cs IB140), Salánki Ági (26, Cs, IB147), Tassy Gergely (28, Cs R511)

# A Számítástudomány alapjai

ELSŐ ZH pótlása 2012. XII. 12. 10<sup>15</sup>

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a padon vagy a hallgató kezében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

## Feladatok

1. Hányféleképpen lehet elhelyezni a  $8 \times 8$ -as sakktáblán két-két világos és sötét futót, valamint két-két világos és sötét huszárt (összesen 8 figurát) úgy, hogy pontosan egy sötét és egy világos futó álljon világos mezőn? (Nem baj, ha a figurák esetleg ütésben állnak.)
2. Az  $n$  rekordot tartalmazó  $A[1..n]$  rendezett tömbben valamelyik rekord megváltozott, de nem tudjuk, hogy melyik. Adjunk egy legfeljebb  $2n$  összehasonlítást igénylő algoritmust a megváltozott tömb rendezésére.
3. Hányféleképpen lehet egy 5 méretű tömbbe úgy beleírni az 1, 2, 3, 4, 5 rekordokat, hogy kupacot kapjunk?
4. Határozzuk meg, hogy a  $K_n$  teljes gráfnak hány  $C_4$  részgráfja van. (Két részgráf akkor nem különbözik, ha csúcshalmazaik is **és** élhalmazaik is megegyeznek. A  $C_4$  gráf a 4 pontú kör.)
5. Izomorfak-e a  $(4, 4, 2, 2, 1, 5, 6, 1)$  ill. az  $(5, 3, 3, 6, 1, 5, 6, 1)$  Prüfer-kódú fák?
6. Tegyük fel, hogy 386 politikus mindegyikére igaz, hogy a többiek közül pontosan annyit tekint nácinak, mint ahányan órála ugyanezt gondolják. Tudjuk továbbá, hogy van olyan politikus, akit legalább egy társa nácinak mond. Igazoljuk, hogy létrehozható néhány (akár az összes) politikusból olyan bizottság, ami úgy ültethető le egy kerekasztalhoz, hogy mindenki nácinak tekinti a tőle jobbra ülőt.

Jó munkát!

# A Számítástudomány alapjai

MÁSODIK ZH pótlása 2012. XII. 12. 10<sup>15</sup>

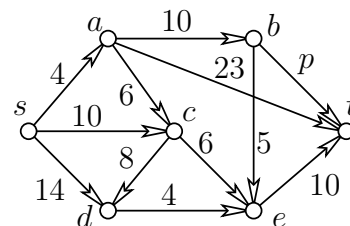
A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Kérjük, minden résztvevő **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a padon vagy a hallgató kezében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

## Feladatok

1. Tegyük fel, hogy a  $2n$  pontú  $G$  gráf  $n$ -szeresen összefüggő. Igaz-e, hogy  $G$ -nek bizonyosan van Hamilton köre?
2. Tegyük fel, hogy a  $(G, s, t, c)$  hálózatban  $f$  maximális nagyságú folyam és  $C$  a  $G$  egy olyan irányított köre, amelynek minden élén  $f$  pozitív értékeket vesz fel. Bizonyítsuk be, hogy  $C$  egyetlen éle sem tartozik minimális kapacitású (értékű)  $st$ -vágáshoz.
3. Legyen  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  az egyszerű  $G$  páros gráf egy színoztálya, és tegyük fel, hogy  $d(a_i) \geq i$  teljesül minden  $1 \leq i \leq n$  esetén. Igazoljuk, hogy  $G$ -ben van  $A$ -t fedő párosítás.
4. Legyenek  $v_2, v_3, \dots, v_7, v_8$  a  $G$  gráf csúcsai, és pontosan akkor legyen  $v_i$  és  $v_j$  között él, ha  $i^2 - 1$ -nek és  $j^2 - 1$ -nek van 1-nél nagyobb közös osztója. Rajzoljuk le  $G$  egy áttekinthető diagramját, valamint döntsük el, síkbarajzolható-e  $G$ .
5. Legyenek a  $G_n$  egyszerű gráf csúcsai az  $(i, j)$  számpárok, ahol  $i$  és  $j$  1 és  $n$  közötti egészek. A  $G$  gráf  $(i, j)$  és  $(k, l)$  egymástól különböző csúcsai pontosan akkor szomszédosak, ha  $i = k$  vagy  $j = l$ . Rajzoljuk le  $G_3$  egy áttekinthető diagramját, valamint, vatározzuk meg  $G_3$  kromatikus számát,  $\chi(G)$ -t.

6. Állapítsuk meg, hogy az ábrán látható PERT problémában legfeljebb mennyi lehet a  $p$  paraméter értéke ahhoz, hogy a teljes feladat végrehajtható legyen 42 időegység alatt.



Jó munkát!