A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2012.10.11.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Szerencsére elmúlt a veszély, pánikra semmi ok. Luke Skywalker ugyan kivont lézerkarddal ment órára a jediképzőben, de a birodalmi gárda sem teketóriázott: még kicsöngetés előtt sikerült megelőznie a fejvesztett zűrzavart. A hatalmas sikert természetesen sajtótájékoztató követte, amire a birodalmiak három tagú vezetése terepszínű álcaruházatban, 10 feketébe öltözött elitgárdista társaságában vonult be. Itt minden nyitott kérdés megnyugtatóan tisztázódott, csupán egyetlen egy maradt. Hányféle sorrendben történhet a bevonulás, ha a szigorú előírás szerint 3 gárdista – 1 vezető – 2 gárdista – 1 vezető – 2 gárdista – 1 vezető – 3 gárdista sorrendben kell vonulniuk? Segítsünk nekik.

   Minden bevonulási sorrendhez tartozik a vezetőknek és a gárdistáknak is egy-egy sorrendje. Ráadásul a vezetők tetszőleges sorrendjéhez és a gárdisták tetszőleges sorrendjéhez pontosan egy helyes bevonulási sorrend tartozik, amit úgy kapunk, hogy a két sorrendet alkalmas módon összefésüljük. (4 pont)
   A vezetők sorrendje egy permutáció, ezek lehetséges száma $3!$. (2 pont)
   A gárdisták sorrendje szintén egy ismétlés nélküli permutáció, ezek lehetséges száma $10!$. (2 pont)
   A szabályszerű sorrendek száma tehát a permutáció-párok száma, ami $3! \cdot 10!$, és ez a válasz a sajtótájékoztatón nyitva maradt kérdésre. (2 pont)

   Aki az elitgárdistákat a jól láthatóan viselt azonosító szám ellenére nem tekinti megkülönböztethetőnek, és így $3!$ végeredményt kap, az csak 2 pontot érdemel.

   Aki „félig” különbözteti meg a gárdistákat, azaz $\binom{10}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{2}{1}\binom{5}{2} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{3}{3}$ válasszal próbálkozik, az kapjon 5 pontot.

2. A ruletten egy pörgetés eredménye egy 0 és 36 közötti egész szám (a határokat megengedve). Hányféle olyan 10 pörgetésből álló sorozat lehetséges, ami tartalmaz két azonos eredményű pörgetést?

   A leszámlálandó pörgetések száma úgy kapható, hogy a lehetséges pörgetéssorozatok számából kivonjuk azon pörgetéssorozatok számát, amelyekben mind a 10 szám különböző. (3 pont)
   A lehetséges pörgetéssorozatok száma 37 elem 10-edosztályú ismétléses permutációinak száma, azaz 37^{10}. (3 pont)
   A csupa különböző eredményt adó pörgetéssorozatok éppen 37 elem 10-edosztályú ismétlés nélküli variációi, ezek száma $\frac{37!}{27!}$. (3 pont)
   A válasz tehát $37^{10} - \frac{37!}{27!}$. (1 pont)

   Aki szerint egy pörgetés kimenetele csupán 36-féle lehet, de egyébként jól számol, az kapjon 9 pontot.

3. Adott $n+2$ rendezett tömb, méreteik rendre $1, 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n$. Adjunk olyan eljárást, ami legfeljebb 2^{n+2} összehasonlítással rendezi a tömbökben tárolt rekordokat.

   Tanultuk, hogy egy n és egy k méretű rendezett tömb összefésüléséhez legfeljebb $n+k$ összehasonlítás szükséges. (Valójában elegendő $n+k-1$ is, de a számolás egyszerűbb a fenti, rosszabb becsléssel.) (3 pont)
   Fésüljük össze a két 1 méretű tömböt, majd az így kapott 2 méretűt az eredetileg kapott 2 méretűvel, az így kapott 4 méretű tömböt az inputban szereplő 4 méretű tömbbel, sít. (4 pont)
   Az egyes összefésülésekhez legfeljebb $2, 4, 8, \ldots, 2^{n+1}$ összehasonlítás szükséges, így az összehasonlítások száma a teljes eljárásban legfeljebb $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} = 2^{n+2} - 2 < 2^{n+2}$ (3 pont)

4. Kupac-e az $\boxed{1|4|2|8|3|7|5}$ tömb?

A kupactulajdonság akkor teljesül egy tömbre, ha minden i-re igaz, hogy a tömbben i-diknek tárolt rekord nem nagyobb sem a tömbben $2i$-diknek, sem pedig a $(2i+1)$-diknek tárolt rekordnál. (Természetesen akkor, ha léteznek a tömbben a kérdéses elemek.) (5 pont)
Azonban az 5-diknek tárolt rekord kisebb a 2-dik rekornál, (3 pont)
a kupactulajdonság tehát nem teljesül, (1 pont)
a kérdezett tömb nem kupac. (1 pont)

5. Legfeljebb hány olyan egymással nem izomorf, 10 pontú gráf adható meg, amelyek egyetlen 9-fokú és 9 db 3-fokú csúcsot tartalmaznak?

Ez a feladat rosszul lett kitűzve: nem kötöttük ki, hogy a gráf egyszerű. A kitűzött feladat megoldása sajnos reménytelen. Ezért az alábbi eljárást követjük. Mindenkinek csak a maradék 5 megoldását értékeljük, és az arra kapott pontszámát szorozzuk 1,2-vel, majd lefelé kerekítünk. Ezen kívül, aki foglalkozott ennek a feladatnak az egyszerű változatával, az kapjon legfeljebb 5 pontot a helyes megoldásért, aki pedig a nem egyszerű változatot nézte és érdemi eredményt ért el, az legfeljebb 4 pontot kapjon. A rossz kitűzés egyértelműen az én hibám (Fleiner), elnézést kérek mindenkitől az okozott kellemetlenség miatt.

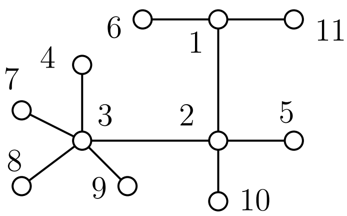
A feladatban szereplő gráfok mindegyike úgy kapható meg, hogy egy 9 csúcsú 2-reguláris gráfhoz (amiben tehát minden csúcs fokszáma 2) hozzáveszünk egy 10-dik pontot, amit minden más csúccsal összekötünk. (2 pont)
Két ilyen gráf pontosan akkor lesz izomorf egymással, ha a teljes fokú csúcs törlésével kapott 2-reguláris gráfok izomorfak. (2 pont)
Egy 2-reguláris gráf minden komponense kör, tehát a gráf diszjunkt körök uniója. (2 pont)
Az tehát a kérdés, hogy hány lényegesen különböző módon lehet 9 pontot diszjunkt körökkel lefedni, azaz hányféleképpen lehet a 9-et olyan egész számok összegére felbontani, amelyek mindegyike legalább 3. (2 pont)
Ez utóbbit viszont kiszámolhatjuk az ujjainkon: $9 = 3+3+3 = 3+6 = 4+5$, ami pontosan 4-féle lehetőség, vagyis legfeljebb 4 páronként nem izomorf gráf adható meg a feladatban megkívánt tulajdonsággal. (2 pont)

6. Határozzuk meg azt az F' fát, aminek Prüfer-kódja az ábrán látható F fa Prüfer-kódjának fordítottja, tehát amit úgy kapunk, hogy F Prüfer-kódját jobbról balra olvassuk.

Az órán tanult módszerrel kiszámítjuk az adott fa Prüfer-kódját: mindig a legkisebb leveleket törölve, és azok szomszédját felírva kapjuk az $(1,2,2,3,3,3,1,2,3)$ Prüfer-kódot. (3 pont)
Ennek fordítottja a $(3,2,1,3,3,3,2,2,1)$ kód, (1 pont)
amihez az órán tanultak szerint hozzáírunk egy 11-est, majd mindig az adott halmazból hiányzó legkisebb elemeket kitöltve megkapjuk a leveleket a

3	2	1	3	3	3	2	2	1	11
4	5	6	7	8	9	3	10	2	1

táblázat szerint. (4 pont)



Az ábrán látható a keresett fa, éleit a táblázat oszlopai határozzák meg. (2 pont)

A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2012.11.22.)

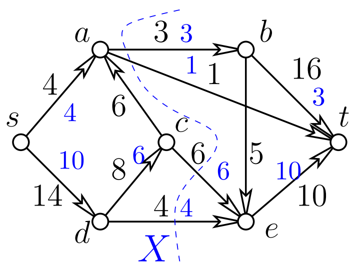
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy az egyszerű G gráfnak 100 csúcsa van, ezek közül u és v foka 45, a többi csúcsé pedig legalább 55. Igazoljuk, hogy G-ben van Hamilton út.

   Ore tanult tétele szerint ha egy n pontú egyszerű G gráf bármely két nem szomszédos csúcsának fokszámösszege legalább n, akkor G-nek van Hamilton köre. (3 pont)
   Ha tehát u és v szomszédosak, akkor teljesül az Ore feltétel, van tehát G-ben Hamilton kör, (2 pont)
   ebből egy élt törölve pedig G Hamilton útját kapjuk. (1 pont)
   Ha pedig u és v nem szomszédosak, akkor húzzunk be közéjük egy élt, és nevezzük G'-nek a kapott gráfot. (2 pont)
   Mivel G'-re már teljesül az Ore feltétel, ezért G'-ben van Hamilton kör, (1 pont)
   ami még az uv él törlése után is tartalmazza G egy Hamilton útját. Ezzel mindkét esetben igazoltuk a feladat állítását. (1 pont)

2. Találjunk a fenti ábrán látható hálózat st-vágásai közül egy olyat, aminek a kapacitása (értéke) minimális.

   Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult módon, a segédgráfban növelő utakat keresve. (1 pont)
   Az ábrán a kisebb méretben szedett számok a talált f folyam által felvett értékek, amit úgy kaptunk, hogy a 0 folyamból kiindulva az $sabt$, sat, $sdet$ és $sdcet$ utakon javítottunk $3, 1, 4$ ill. 6 egységnyit. (4 pont)
   Az f folyam nagysága 14, és ugyanennyi az ábrán szaggatott vonallal jelzett, az s-ből a segédgráfban elérhető pontok X halmaza által indukált st-vágás kapacitása is. (3 pont)

   Mivel minden st-vágás kapacitása legalább 14 az f folyam miatt, ezért a szóban forgó st-vágás valóban minimális kapacitású. (2 pont)

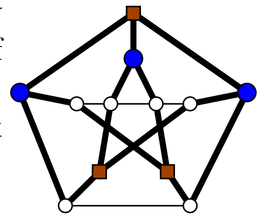
3. Jelölje $n \geq 2$ esetén G_n az a gráf, amit C_{2n}-ből úgy kapunk, hogy annak átellenes csúcsait éllel összekötjük. Határozzuk meg minden $n \geq 2$-re G_n kromatikus számát, $\chi(G_n)$-t.

   Ha n páratlan, akkor az átlók a páros C_{2n} gráf különböző színosztályai között futnak, így a C_{2n}-hez szükséges két szín elegendő G_n színezésére is, (3 pont)
   vagyis $\chi(G_n) = 2$. (1 pont)
   Ha pedig n páros, akkor egy átló a C_{2n} egyik ívével páratlan kört alkot, tehát G_n színezéséhez legalább 3 szín kell, azaz $\chi(G_n) \geq 3$. (2 pont)
   Ha $n = 2$, akkor $G_n = K_4$, tehát $\chi(G_2) = 4$. (1 pont)
   Az $n > 2$ esetben vegyük észre, hogy G_n összefüggő, nem páratlan kör és nem is teljes gráf, ezért az órán tanult Brooks tétel miatt $\chi(G_n) \leq \Delta(G_n) = 3$, (2 pont)
   tehát ebben az esetben $\chi(G_n) = 3$. (1 pont)

   A Brooks tétel alkalmazása kiváltható a G_n egy konkrét 3-színezésének megadásával, pl úgy, hogy egy átlót és két tőle diszjunkt átellenes élt azonos színűre színezünk, és ennek a párosításnak a „körbeforgatása” adja a további színosztályokat.

4. Síkbarajzolható-e a mellékelt ábrán látható 12 csúcsú gráf?

A Kuratowski tétel szerint egy gráf pontosan akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz a K_5-tel vagy a $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot. Úgy igazoljuk, hogy az ábrán látható gráf nem síkbarajzolható, hogy a $K_{3,3}$ egy soros bővítésével izomorf részgráfot mutatunk. (3 pont)



Egy ilyen részgráfot jeleztünk az ábrán vastag élekkel, a házak kiskockák, a kutak pettyek. (6 pont)

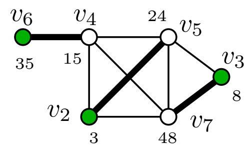
Tehát a kérdezett gráf nem síkbarajzolható. (1 pont)

Az is elfogadható megoldás, ha arra hivatkozunk, hogy az órán/gyakorlaton szerepelt, hogy a Petersen gráf még az után is tartalamazza $K_{3,3}$ soros bővítését, hogy egy „belső” élét töröljük. Márpedig ha a kérdezett gráfban töröljük a 4 pontú „vízszintes” út éleit, akkor az említett éltörölt Petersen gráf egy soros bővítését kapjuk, ami szintén nem síkba rajzolható. De akár a Wagner tétel szerinti élösszehúzásos bizonyítás is működik K_5-tel, csak trükkös.

5. Legyenek $v_2, v_3, \ldots, v_7$ a G egyszerű gráf csúcsai, és pontosan akkor fusson v_i és v_j között él, ha i^2-1-nek és j^2-1-nek van 1-nél nagyobb közös osztója. Rajzoljuk le G egy áttekinthető diagramját, számítsuk ki a G-ben található független élek ill. független csúcsok maximális számát ($\nu(G)$-t és $\alpha(G)$-t), valamint a G-t lefogó pontok ill. élek minimális számát ($\tau(G)$-t és $\rho(G)$-t).

Az ábra a feladatban leírt gráfot mutatja, a v_i csúcsnál az i^2-1 érték is szerepel, kisebb számokkal. (3 pont)

Gallai tételei szerint, ha G-ben nincs sem hurokél, sem izolált pont, akkor $\nu(G)+\rho(G) = |V(G)| = \alpha(G)+\tau(G)$. (2 pont)

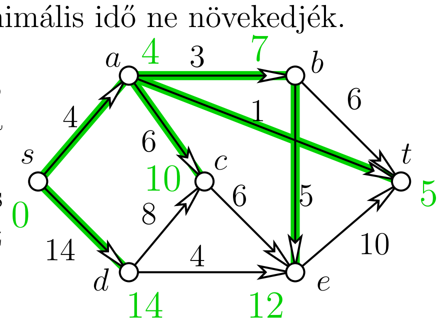


A vastagon kihúzott élek G egy teljes párosítását alkotják, így $\nu(G)=3$, (1 pont)
és a Gallai tétel miatt $\rho(G) = 6-3-3$. (1 pont)
A satírozott 3 csúcs G egy független ponthalmaza, (1 pont)
ráadásul ennél több független csúcs nincs G-ben, hisz a v_2, v_4, v_5, v_7 csúcsok alkotta klikk 4 csúcsából legfeljebb egy lehet a független ponthalmazban, azaz tetszőleges független ponthalmaz G-nek legalább 3 csúcsát nem tartalmazza. Tehát $\alpha(G)=3$. (1 pont)
A Gallai tétel miatt $\tau(G) = 6-3-3$. (1 pont)

6. Állapítsuk meg, hogy a 2. feladathoz tartozó ábra meghatározta PERT problémában melyek azok a tevékenységek, amelyeket el tudunk kezdeni a lehető legkorábbi kezdési időpontjuknál valamivel később úgy, hogy ettől a késéstől a teljes feladat végrehajtásához szükséges minimális idő ne növekedjék.

A megadott gráf csúcsainak s, d, c, a, b, e, t egy topologikus sorrendje, így ebben a sorrendben állapítjuk meg az órán tanult módszer szerint a legkorábbi kezdési időket. (4 pont)

Ezeket az időket az egyes csúcsoknál jeleztük, valamint minden egyes csúcsnál megvastatítottuk azt az adott csúcsba befutó élt, ami miatt az adott tevékenység nem kezdődhet hamarabb. (3 pont)



Az adódott, hogy a feladatot legkorábban $t=47$-ben lehet befejezni az *sdcabt* kritikus út miatt, más kritikus út nincs. Mivel pontosan a kritikus úton található tevékenységek azok, amelyeknek pontosan kell kezdődniük a feladat optimális végrehajtásához, egyedül az e tevékenység az, ami csúszhat valamennyit (konkrétan legfeljebb 1 időegységet) úgy, hogy ne veszélyeztesse a feladat időben történő befejezését. (3 pont)

A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2011.11.29.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. A villamosmérnök szak mind az 556 hallgatója két-két ZH-t írt: egyet számítástudományból, egyet pedig analízisből. Számítástudományból senki sem ért el 36 pontnál többet. Bizonyítsuk be, hogy van négy olyan hallgató, akik amellett, hogy ugyanannyi pontot kaptak a számítástudomány ZH-jukra, analízisből is egyforma osztályzatot szereztek.

   A feltétel szerint egy hallgató 37 féle pontszámot szerezhetett SzA-ból, és ötféle osztályzatot analízisből, (2 pont)
   így legfeljebb $5 \cdot 37 = 185$-féle lehet e két eredmény. (2 pont)
   Ha egyetlne olyan eredménypár sem lenne, amit háromnál több hallgató ért el, akkor a hallgatók száma legfeljebb $3 \cdot 185 = 555$, volna, de tudjuk, hogy 556 a hallgatók száma. (5 pont)
   Ezért van négy olyan hallgató, akik azonos SzA pontszámot és Analízis érdemjegyet szereztek, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

2. Adjunk olyan eljárást, ami $2^{n-1} - 1$ összehasonlítással meghatározza egy $2^n - 1$ különböző rekordot tartalmazó kupacban a legnagyobb elemet.

   A kupacban tárolt legnagyobb rekord biztosan levél, hiszen ha lenne leszármazottja a bináris fában, az nagyobb lenne, egész pontosan nem lehetne nála kisebb. (3 pont)
   Elegendő tehát a kupachoz tartozó bináris fa leveleiben tárolt rekordok között megkeresni a legnagyobbat. (1 pont)
   Ezek a levelek egyébként a tömb második felében helyezkednek el. (0 pont)
   A $2^n - 1$ rekordot tartalmazó kupachoz tartozó bináris fának n szintje van, az egyes szinteken $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$ rekorddal, tehát a fának pontosan 2^{n-1} levele van. (3 pont)
   Az órán tanultak szerint 2^{n-1} rekord közül a legnagyobb meghatározásához elegendő $2^{n-1} - 1$ összehasonlítás. (3 pont)

   Megjegyzés: ha a kupacban eggyel több, azaz 2^n rekord lenne, a hozzá tartozó bináris fának akkor is 2^{n-1} levele volna, így ugyanennyi összehasonlításra volna szükség a legnagyobb rekord meghatározásához.

3. A $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline \sqrt{5} & 2 & \pi & 8 & 5 & \sqrt{3} & 6 & \sqrt{7} \\ \hline \end{array}$ tömb összefésüléses rendezéséhez pontosan hány páronkénti összehasonlításra van szükség?

   A rendezés a $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sqrt{5} & 2 & \pi & 8 \\ \hline \end{array}$ résztömb összefésüléses rendezésével kezdődik. (1 pont)
   Ebben először egy-egy összehasonlítással rendezzük az első két ill. harmadik és negyedik elemeket, majd összefésüljük a kapott $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & \sqrt{5} \\ \hline \end{array}$ és $\begin{array}{|c|c|}\hline \pi & 8 \\ \hline \end{array}$ tömböket, amihez két összehasonlítás kell. (2 pont)
   A másodiknak rendezett $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 5 & \sqrt{3} & 6 & \sqrt{7} \\ \hline \end{array}$ tömb esetében két összehasonlítás után a $\begin{array}{|c|c|}\hline \sqrt{3} & 5 \\ \hline \end{array}$ és $\begin{array}{|c|c|}\hline \sqrt{7} & 6 \\ \hline \end{array}$ tömböket fésüljük össze a $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sqrt{3} & \sqrt{7} & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$ tömbbé 3 összehasonlítással. (3 pont)
   Végül a kapott $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & \sqrt{5} & \pi & 8 \\ \hline \end{array}$ és $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sqrt{3} & \sqrt{7} & 5 & 6 \\ \hline \end{array}$ tömböket fésüljük össze, amihez legvégül a 6 és 8 elemeket kell összehasonlítani, tehát „egyszerre” fogynak el a tömbök, így ehhez 7 összehasonlítás kell. (3 pont)
   A teljes eljárás tehát $2 + 2 + 2 + 3 + 7 = 16$ páronkénti összehasonlítást használ. (1 pont)

   Ha a leírásból látszik, hogy a hallgató pontosan érti, hogyan működik az összefésüléses rendezés, de úgy számol, hogy két k méretű tömb összefésüléséhez $2k - 1$ összehasonlítás kell (még ha az egyik tömb hamarabb el is fogy), akkor a megoldás legfeljebb 7 pontot ér.

4. Legfeljebb hány olyan egymással nem izomorf, egyszerű, 7 pontú gráf adható meg, amelynek minden csúcsa 4-edfokú?

Egy egyszerű G gráf komplementere az a $\overline{G}$ gráf, amiben két pont pontosan akkor szomszédos, ha G-ben nem szomszédosak. Az izomorfia definíciójából azonnal adódik, hogy két gráf pontosan akkor izomorf, ha komplementereik izomorfak. (1 pont)
Ezek szerint nekünk elegendő megszámolni, hányféle nemizomorf módon adható meg a kérdezett gráfok komplementere. (2 pont)
E komplementerben minden csúcs fokszáma pontosan 2 lesz, (1 pont)
tehát a komplementer gráf diszjunkt körök uniója. (2 pont)
Azt kell tehát leszámlálnunk, hogy hányféleképpen adható meg néhány diszjunkt kör 7 ponton, (2 pont)
azaz, hányféleképpen lehet a 7-et előállítani olyan pozitív egészek összegeként, amelyek mindegyike legalább 3. (1 pont)
Erre pontosan két leehtőségünk van: 7 ill. $3+4$. Eszerint a feladatbeli kérdésre a válasz pontosan kettő, (1 pont)
konkrétan a C_7 komplementre ill. az a G gráf, amit a $K_{3,4}$ teljes páros gráfból úgy kapunk, hogy behúzunk két diszjunkt élt a 4 pontú színosztályba. (0 pont)

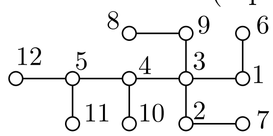
5. Tegyük fel, hogy a háromszöget nem tartalmazó, irányítatlan, 100 csúcsú G egyszerű gráf 4-reguláris, azaz minden csúcs fokszáma 4. Hány olyan 3-élű van részgráfja G-nek, ami út?

A G gráf minden 3-élű sétája út, mivel G egyszerű és nincs benne háromszög. (1 pont)
Ezért elegendő megszámolni, hány 3-élű séta van G-ben: a kérdezett utak száma ennek pontosan a fele lesz, hiszen minden útból pontosan két sétát lehet alkotni. (2 pont)
A séta első csúcsa 100-féle lehet, hisz bármely csúcs szóba jön. A második csúcs a 4-regularitás miatt 4-féle lehet, (2 pont)
míg a harmadik csúcs, az iménti három maradék szomszédjának valamelyike, így ez 3-féleképp választható, hasonlóan a 4-dikhez. (3 pont)
A 3-élű séták száma tehát pontosan $100 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 3600$-nak adódik, így kérdezett részgráfok száma kereken $\frac{3600}{2} = 1800$. (2 pont)

6. Legyen F az a fa, aminek Prüfer-kódja $(1, 3, 2, 3, 9, 3, 4, 4, 5, 5)$. Hány komponensre esik szét F, ha töröljük a 3-as címkéjű csúcsát?

Tanultuk, hogy minden csúcs foka 1-gyel több, mint ahányszor a Prüfer-kódban szerepel. (3 pont)
A 3-as címkéjű csúcs a kódban 3-szor fordul elő, így a fokszáma 4 (2 pont)
Ha tehát a 3-as címkéjű csúcsot elhagyjuk F-ből, akkor a maradék gráfnak pontosan 4 komponense lesz (5 pont)

Nem tilos persze F meghatározása sem. Járjon 7 pont a fa helyes felrajzolásáért, 3 pont pedig a 3-as csúcs fokának megszámálásáért és a válaszért.



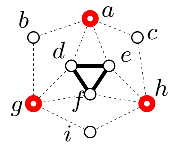
A Számítástudomány alapjai

2. pZH javítókulcs (2011.11.29.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Van-e az ábrán látható gráfnak Euler ill. Hamilton köre? Ha van, mi abban a csúcsok sorrendje?

   Létezik Euler kör, pl $bgihcadfedgfheab$. (4 pont)
   Ha a gráfon az ábrán látható a, g, h csúcsokat töröljük, akkor 4 komponensű gráfot kapunk. (3 pont)

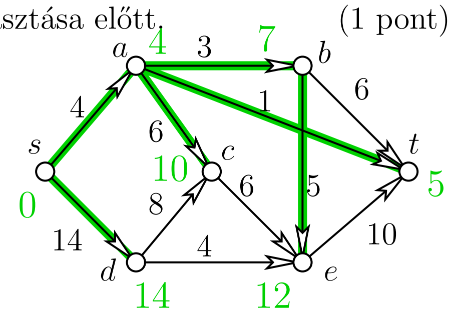
   Márpedig ha létezne Hamilton kör, akkor 3 csúcs törlés után legfeljeb 3 komponens keletkezhetne a Hamilton kör létezésére tanult szükséges feltétel miatt. (2 pont)
   Az ábrán látható gráfnak tehát nincs Hamilton köre. (1 pont)

2. Az ábrán látható gráfon a Dijkstra algoritmus segítségével állapítsuk meg a legrövidebb st-út hosszát, valamint határozzuk meg, milyen sorrendben határozza meg az algoritmus a $dist(s, v)$ távolságokat (azaz milyen sorrendben kerülnek véglegesítésre a csúcsok s-től mért távolságai).

   Azt kell meghatároznunk, hogy milyen sorrendben kerülnek a be a gráf csúcsai abba az U halmazba, ami azokat a csúcsokat tartalmazza, ahova a legrövidebb utakat már ismerjük. Természeten az első csúcs maga s lesz. (1 pont)
   Az algoritmus kezdetén felírjuk minden egyes csúcsra az s-ből oda vezető él hossza alapján adódó felső becslést az adott csúcs távolságára, így a

s	a	b	c	d	e	t
0	4	∞	∞	14	∞	∞

   táblázatot kapjuk. (1 pont)
   A második csúcs tehát a lesz, innen javítunk a következő csúcs választása előtt. (1 pont)

   Ezután az ab, ac és at éleken javítva adódik a

s	a	b	c	d	e	t
0	4	7	10	14	∞	5

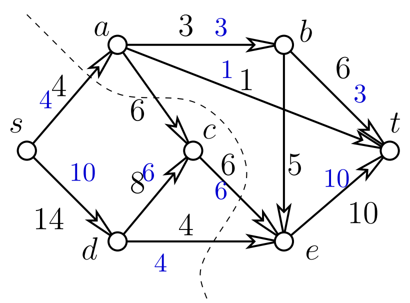
   táblázat, így a harmadik csúcs a t lesz. (2 pont)
   t-ből nem javítunk, a negyedik csúcs tehát b. (1 pont)
   A be élen javítva a

s	a	b	c	d	e	t
0	4	7	10	14	12	5

   táblázatot kapjuk, így az ötödik csúcs c lesz. (1 pont)
   A ce élen nincs javulás, a hatodik csúcs tehát e lesz, (1 pont)
   e-ből nem kell javítani, így a utolsónak bevett csúcs a d. (1 pont)
   A végső sorrend tehát s, a, t, b, c, e, d, az s és t távolsága pedig 5. (1 pont)

3. Bizonyítsuk be, hogy a fenti ábrán látható hálózatban a maximális folyamnagyság (folyamérték) pontosan 14. Elérhető-e két él kapacitásának alkalmas megnövelésével, hogy a maximális folyamnagyság pontosan 16 legyen?

   Az ábrán kisebb számokkal egy 14 nagyságú folyamot (2 pont)
   és egy 14 kapacitású st-vágást meghatározó ponthalmazt jelöltünk. (2 pont)

   Ezért a megadott hálózatban a maximális folyamnagyság valóban 14. (1 pont)
   Ha azonban a de és et élek kapacitását legalább 2-vel növeljük, akkor az $sdet$ úton tudunk további 2 egységnyi folyamot küldeni, (3 pont)
   és a jelölt vágás kapacitása is 16-ra változik. (1 pont)

Ezért a feladat második kérdésére igen a válasz: két él kapacitásának növelésével elérhető, hogy a maximális folyamnagyság pontosan 16 legyen. (1 pont)

4. Egy G páros gráfot akkor nevezünk *kiegyensúlyozottnak*, ha G csúcsainak bármely 2 színnel történő kiszínezésekor a két színosztály mérete megegyezik. Igazoljuk, hogy $r \geq 1$ esetén ha egy G páros gráf r-reguláris (azaz G minden csúcsának foka r), akkor G kiegyensúlyozott.

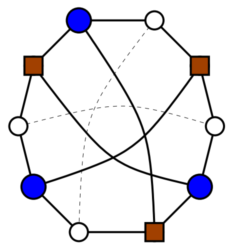
   Legyenek A és B a G színosztályai a G egy két színnel történő színezése esetén. Azt kell megmutatnunk, hogy $|A| = |B|$. (2 pont)
   Mivel G minden élének egyik végpontja A-ban, a másik pedig B-ben van, ezért G éleinek számát megkaphatjuk úgy is, mint az A-beli csúcsok fokszámösszegét, de úgy is, hogy a B-beli pontok fokszámait adjuk össze. (4 pont)
   Mivel minden fokszám r, ezért $r \cdot |A| = |E| = r \cdot |B|$ adódik, (3 pont)
   ahonnan $r \geq 1$ miatt ebből $|A| = |B|$ következik, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

   Ha a gyakorlaton szerepelt, hogy r-reguláris páros gráfnak van teljes párosítása ($r > 0$ esetén), akkor teljes megoldás az is, ha valaki innen vezeti le a kiegyensúlyozottságot.

5. Jelölje $n \geq 3$ esetén C'_n azt a gráfot, amit úgy kapunk, hogy C_n-hez hozzávesszük az egymással nem szomszédos x és y pontokat, amelyeket összekötünk C_n minden csúcsával. Határozzuk meg C'_n kromatikus számát, $\chi(C'_n)$-et minden $n \geq 3$ esetén.

   Tekintsük C'_n egy színezését. Ebben az x csúcs színét nem kaphatja meg C_n egyetlen pontja sem, ezért C'_n színezéséhez legalább eggyel több színre van szükség, mint C_n színezéséhez. (3 pont)
   Másrészt ha C_n-t kiszíneztük néhány színnel, akkor x-t és y-t egy újabb színnel színezve a C'_n egy jó színezését kapjuk. (2 pont)
   Ezek szerint $\chi(C'_n) = \chi(C_n) + 1$. (1 pont)
   Az órán olyat tanítottak, hogy $\chi(C_n)$ attól függően 2 ill. 3, hogy n páros avagy páratlan-e. (2 pont)
   Ezek szerint $\chi(C'_n)$ páros n-re 3, páratlanra pedig 4. (2 pont)

6. Jelölje $n \geq 2$ esetén G_n az a gráfot, amit C_{2n}-ből úgy kapunk, hogy annak minden csúcsát éllel összekötjük a vele átellenes csúccsal (ami tehát tőle legtávolabb van a körön). Síkbarajzolható-e a G_n gráf?

   Ha $n = 2$, akkor $G_n = K_4$, ami síkbarajzolható. (2 pont)
   Ha azonban $n \geq 3$, akkor G_n már nem síkbarajzolható, mert tartalmaz $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot, és ehhez elég, ha csupán három átellenes csúcspárt összekötő átló van behúzva. A részgráf az ábrán látható, kiskocka jelöli a házakat, petty a kutakat. (7 pont)
   A válasz tehát, hogy G_n kizárólag $n = 2$ esetén síkbarajzolható. (1 pont)

   Érdekes megfigyelni, hogy $G_3 = K_{3,3}$. Aki csak ennyit tesz, az kapjon 5 pontot.

A Számítástudomány alapjai

1. ppZH javítókulcs (2011.12.12.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Hányféleképpen lehet elhelyezni a 8×8-as sakktáblán két-két világos és sötét futót, valamint két-két világos és sötét huszárt (összesen 8 figurát) úgy, hogy pontosan egy sötét és egy világos futó álljon világos mezőn? (Nem baj, ha a figurák esetleg ütésben állnak.)

   A világos mezőn álló világos futót 32-féleképp lehet elhelyezni, ezt követően a világos mezőn álló sötét futó számára 31 lehetséges hely marad, így e két futó elhelyezési lehetőségeinek száma $32 \cdot 31$. (2 pont)
   Hasonló okból ugyanennyi lehetőség van a sötét mezőn álló két futó lerakására is. (1 pont)
   A maradék 60 mezőn kell elhelyezni még két sötét és két világos huszárt. (1 pont)
   A világos huszárokat $\binom{60}{2}$-féleképp helyezhetjük el, (2 pont)
   ezt követően a sötét huszárok a fennmaradó 58 helyen $\binom{58}{2}$-féleképp rakhatók le (2 pont)
   Mivel a fenti módszerrel minden leszámlálandó állást pontosan egyszer számolunk meg, továbbá az egyes döntési lehetőségek száma független a korábbi választásainktól, a kérdezett szám pontosan $32 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 31 \cdot \binom{60}{2} \cdot \binom{58}{2} = 32^2 \cdot 31^2 \cdot \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57}{2 \cdot 2}$. (2 pont)

2. Az n rekordot tartalmazó $A[1..n]$ rendezett tömbben valamelyik rekord megváltozott, de nem tudjuk, hogy melyik. Adjunk egy legfeljebb $2n$ összehasonlítást igénylő algoritmust a megváltozott tömb rendezésére.

   Sorra összehasonlítjuk az $A(1) - A(2), A(2) - A(3), \ldots$ rekordokat. Ez összesen $n-1$ összehasonlítás. Ha $A(i) \le A(i+1)$ teljesül minden i-re, akkor a tömbünk a változás után is rendezett maradt, így nincs szükség további összehasonlításra a rendezéshez. (3 pont)
   Ha azonban $A(i) > A(i+1)$, akkor vagy $A(i)$, vagy $A(i+1)$ változott. (2 pont)
   Ilyenkor beszúrjuk $A(i+1)$-et a tömb $A[1..i-1]$ részébe, amihez legfeljebb $i-1$ összehasonlítás kell, (2 pont)
   majd beszúrjuk $A(i)$-t a tömb $A[i+2..n]$ részébe, legfeljebb $n-(i+1) = n-i-1$ összehsonlítással. (2 pont)
   Világos, hogy a kapott tömb rendezett lesz, hisz $A(i)$ és $A(i+1)$ is a helyére kerül. Az elvégzett összehasonlítások száma pedig legfeljebb $n-1+i-1+n-i-1 = 2n-3$ volt. (1 pont)

   Mivel egyébként tömbről van szó, a két beszúrás jóval gyorsabban elvégezhető a lineáris keresésnél: $n + 2 \cdot \log_2 n$ összehasonlítás bőven elég a rendezésre.

3. Hányféleképpen lehet egy 5 méretű tömbbe úgy beleírni az $1, 2, 3, 4, 5$ rekordokat, hogy kupacot kapjunk?

   Legyen $A[1..5]$ a tömb. Világos, hogy $A(1) = 1$ hiszen ez a kupacban tárolt legkisebb rekord. (1 pont)
   A kupactulajdonságból még annyi következik, hogy az $A(2)$ rekord kisebb az $A(4)$ és $A(5)$-ben tároltnál, egyéb feltétele nincs annak, hogy kupac legyen a tömb. (2 pont)
   Ezért $A(2)$ csak 2 vagy 3 lehet. (1 pont)
   Ha $A(2) = 3$, akkor $A(4)$ és $A(5)$ a 4 és 5 értéket kapja, míg $A(3) = 2$ lesz, kizárásos alapon. (2 pont)
   Ez tehát 2 lehetőség. (1 pont)
   Ha pedig $A(2) = 2$, akkor az $A(3), A(4), A(5)$ helyre a $3, 4, 5$ rekordokat tetszőleges permutációban beírhatjuk, a kupactulajdonság teljesülni fog. (2 pont)
   Ekkor tehát $3! = 6$ lehetőségünk van a permutáció választására, (1 pont)
   a feladatbeli kérdésre a válasz tehát $2 + 6 = 8$. (1 pont)

4. Határozzuk meg, hogy a K_n teljes gráfnak hány C_4 részgráfja van. (Két részgráf akkor nem különbözik, ha csúcshalmazaik is **és** élhalmazaik is megegyeznek. A C_4 gráf a 4 pontú kör.)

   A vizsgált részgráfokat úgy számláljuk le, hogy kiválasztjuk a csúcsokat, majd a csúcsokhoz az éleket. (2 pont)
   A C_4 kör 4 csúcsát $\binom{n}{4}$-féleképpen választhatjuk ki K_n n csúcsa közül. (3 pont)
   Ha pedig már kiválasztottuk a részgráf 4 csúcsát, akkor a feszített 6 élből egy teljes párosítás éleit kell elhagyni, hogy egy kört kapjunk. A teljes párosítást meghatározza, hogy egy rögzített csúcsnak mi lesz a szomszédja. A szomszéd 3-féleképp választható, tehát 4 csúcson 3 teljes párosítás, így pontosan 3 db C_4 kör található. (4 pont)
   A K_n teljes gráfnak tehát pontosan $3 \cdot \binom{n}{4}$ db C_4 részgráfja van. (1 pont)

5. Izomorfak-e a $(4,4,2,2,1,5,6,1)$ ill. az $(5,3,3,6,1,5,6,1)$ Prüfer-kódú fák?

   Az órán olyat tanítottak, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs pontosan eggyel kevesebbszer szerepel, mint a fabeli foka. (2 pont)
   Az első fának van másodfokú csúcsa (pl az 5-ös címkéjű), míg a másodiknak nincs ilyen, ezért a fák nem lehetnek izomorfak. (8 pont)

   Természetesen az is jó megoldás, ha vki dekódolja a fákat, és úgy mutatja meg, hogy azok nem izomorfak. Helyes dekódolásért $4-4$ pont jár, a nemizomorf tulajdonság megmutatásáért pedig 2.

6. Tegyük fel, hogy 386 politikus mindegyikére igaz, hogy a többiek közül pontosan annyit tekint nácinak, mint ahányan őróla ugyanezt gondolják. Tudjuk továbbá, hogy van olyan politikus, akit legalább egy társa nácinak mond. Igazoljuk, hogy létrehozható néhány (akár az összes) politikusból olyan bizottság, ami úgy ültethető le egy kerekasztalhoz, hogy mindenki nácinak tekinti a tőle jobbra ülőt.

   Legyenek a G irányított gráf csúcsai a politikusok, él pedig akkor fusson a-ból b-be, ha a nácinak tartja b-t. (1 pont)
   Azt tudjuk G-ről, hogy minden csúcsba ugyanannyi él fut, mint amennyi onnan kiindul, továbbá, hogy van olyan csúcs, amibe fut be él. (1 pont)
   Azt kell megmutatnunk G-ről, hogy tartalmaz irányított kört. (1 pont)
   Legyen v_0 olyan csúcs, amibe fut be él. Ekkor v_0-ból indul ki él a feltétel miatt, mondjuk v_1-be. Hasonló okból v_1-ből is indul él, mondjuk v_2-be, onnan v_3-ba, és így tovább. (3 pont)
   Mivel G véges gráf, előbb-utóbb lesz olyan csúcs, ami már korábban is szerepelt: $v_{i+k} = v_i$. (2 pont)
   Ekkor $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+k-1}$ irányított kör lesz G-ben, nekünk pedig pontosan ennek a létezését kellett igazolnunk.

   Természetesen a feladat tökéletesen megoldható G bevezetése nélkül is, de ha valaki csak átfogalmazza gráfokra a feladványt, már azért is jár pont.

A Számítástudomány alapjai

2. ppZH javítókulcs (2012.12.12.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy a $2n$ pontú G gráf n-szeresen összefüggő. Igaz-e, hogy G-nek bizonyosan van Hamilton köre?

   Ha a G gráf n-szeresen összefüggő, akkor bármely csúcsának fokszáma legalább n, hiszen egy csúcsnak kevesebb szomszédja lenne, akkor e szomszédok elhagyásával keletkező izolált ponton kívül még lenne más komponense is a maradék gráfnak. (4 pont)
   Dirac tétele szerint ha egy $2n$ pontú G gráfban minden csúcs fokszáma legalább n, akkor van G-ben Hamilton kör. (3 pont)
   Mivel a megfigyelésünk értelmében G rendelkezik a Dirac tételben megkövetelt tulajdonsággal, G-nek bizonyosan van Hamilton köre. (3 pont)

2. Tegyük fel, hogy a (G, s, t, c) hálózatban f maximális nagyságú folyam és C a G egy olyan irányított köre, amelynek minden élén f pozitív értékeket vesz fel. Bizonyítsuk be, hogy C egyetlen éle sem tartozik minimális kapacitású (értékű) st-vágáshoz.

   Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy a C kör uv éle egy minimális kapacitású st-vágáshoz tartozik. Legyen X az az s-t tartalmazó, t-t elkerülő ponthalmaz, ami ezt a minimális kapacitású vágást meghatározza. (2 pont)
   Az órán tanultak miatt ha f maximális nagyságú folyam, akkor minden X-ből $V(G) \setminus X$-be futó e él telített, azaz $f(e) = c(e)$ teljesül, míg egyetlen $V(G) \setminus X$-ből X-be futó e' él sem hordoz folyamot, azaz $f(e') = 0$. (4 pont)
   Mivel a C irányított körnek van a vágáshoz tartozó, azaz$X$-ből $V(G) \setminus X$-be futó éle, ezért kell lennie a C körnek olyan g élének is, ami $V(G) \setminus X$-ből X-be fut. (2 pont)
   A feladatbeli feltevés szerint a g élen is pozitív nagyságú folyam folyik, ez pedig ellentmond f maximalitásának. (1 pont)
   A kapott ellentmondás igazolja a feladatban megfogalmazott állítást. (1 pont)

3. Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ az egyszerű G páros gráf egy színosztálya, és tegyük fel, hogy $d(a_i) \geq i$ teljesül minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Igazoljuk, hogy G-ben van A-t fedő párosítás.

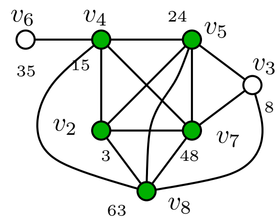
   A Hall tétel szerint pontosan akkor van A-t fedő párosítás G-ben, ha az A tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$ teljesül. (3 pont)
   Legyen tehát $X \subseteq A$, tegyük fel, hogy $|X| = k$. Ekkor van X-nek olyan a_i eleme, amire $i \geq k$ teljesül, hisz ha nem volna ilyen, akkor X-nek legfeljebb csak $k-1$ eleme lehetne. (3 pont)
   Márpedig $|N(X)| \geq d(a_i) \geq i \geq k = |X|$, tehát a Hall feltétel valóban teljesül, (3 pont)
   van G-nek A-t fedő párosítása. (1 pont)

   Avagy:

   Az a feladatunk, hogy A minden a_i csúcsának találjunk egy-egy páronként különböző szomszédot. (1 pont)
   Ezt mohón végezzük, sorra keresünk szomszédot az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ csúcsoknak. (2 pont)
   Mivel $d(a_1) \geq 1$, ezért a_1-nek található pár. (1 pont)
   Ha már találtunk párt az $a_1, a_2, \ldots, a_i$ csúcsoknak, akkor a_{i+1} szomszlédai közül legfeljebb i olyan van, amit nem választhatunk a_{i+1} szomszédjának. (2 pont)
   Mivel $d(a_{i+1}) \geq i+1$, ezért bizonyosan van a_{i+1}-nek olyan szomszédja, amelyet még eddig nem

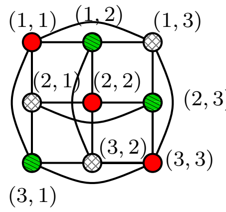
választottunk ki korábban. (3 pont)
Azt kaptuk, hogy a mohó sorrendben dolgozva A minden csúcsának találunk párt, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

4. Legyenek $v_2, v_3, \ldots, v_7, v_8$ a G gráf csúcsai, és pontosan akkor legyen v_i és v_j között él, ha $i^2 - 1$-nek és $j^2 - 1$-nek van 1-nél nagyobb közös osztója. Rajzoljuk le G egy áttekinthető diagramját, valamint döntsük el, síkbarajzolható-e G.



A mellékelt ábra G egy áttekinthetőnek szánt diagramját mutatja, a v_i csúcsnál az $i^2 - 1$ érték is szerepel, kisebb számokkal. (4 pont)
Könnyen látható, hogy a kijelölt csúcsok G-ben egy K_5 részgráfot feszítenek. (4 pont)
Mivel K_5 nem síkbarajzolható, ezért G sem lehet az. (2 pont)

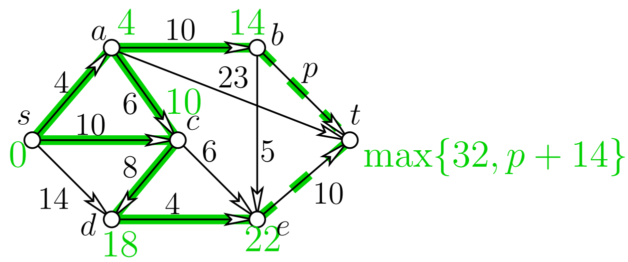
5. Legyenek a G_n egyszerű gráf csúcsai az (i, j) számpárok, ahol i és j 1 és n közötti egészek. A G gráf (i, j) és (k, l) egymástól különböző csúcsai pontosan akkor szomszédosak, ha $i = k$ vagy $j = l$. Rajzoljuk le G_3 egy áttekinthető diagramját, valamint, vatározzuk meg G_3 kromatikus számát, $\chi(G)$-t.



A mellékelt ábra G_3 egy áttekinthetőnek szánt diagramját mutatja. (4 pont)
Mivel az $(1, 1), (1, 2)$ és $(1, 3)$ csúcsok páronként szomszédosak, ezért $\chi(G_3 \geq \omega(G_3) \geq 3$. (3 pont)
Az ábrán látható G_3 egy 3-színezése, tehát $\chi(G_3) = 3$ (3 pont)

6. Állapítsuk meg, hogy az ábrán látható PERT problémában legfeljebb mennyi lehet a p paraméter értéke ahhoz, hogy a teljes feladat végrehajtható legyen 42 időegység alatt.

A megadott gráf csúcsainak s, a, c, d, b, e, t egy topologikus sorrendje, így ebben a sorrendben állapítjuk meg az órán tanult módszer szerint a legkorábbi kezdési időket. (4 pont)



Ezeket az időket az egyes csúcsoknál jeleztük, valamint minden egyes csúcsnál megvastatítottuk azt (vagy azokat) az adott csúcsba befutó éleket, amelyek miatt az adott tevékenység nem kezdődhet hamarabb. (3 pont)
Az adódott, hogy a feladatot minimális végrehajtási ideje $t = \max\{32, p+14\}$. Ha tehát $p \leq 28$, akkor a feladat végrehajtható 42 időegység alatt, ha $p > 28$, akkor pedig nem. (3 pont)