A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2014. 11. 27.)

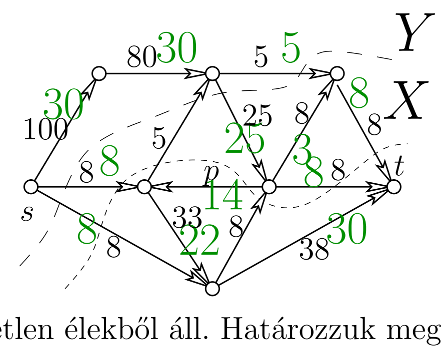
Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Készítsük el a G gráfot egy 7 hosszú körből úgy, hogy hozzáadunk a körhöz $\binom{7}{3}$ új csúcsot, és az új csúcsok mindegyikét a kör három pontjával kötjük össze úgy hogy semelyik két új csúcsnak se ugyanazok a körbeli csúcsok legyenek a szomszédai. Határozzuk meg a G gráf $\chi(G)$ kromatikus számát.

   A G kiszínezéséhez 4 szín elegendő, hiszen a 7 hosszú körre elég 3 szín, a további csúcsok pedig megkaphatják a negyedik színt. (4 pont)
   Megmutatjuk, hogy 3 szín nem elég G csúcsainak kiszínezésére. Tegyük fel indirekt, hogy G csúcsait sikerült 3 színnel színezni. (2 pont)
   A C_7 kör nem páros gráf, ezért csúcsainak színezéséhez szükség van 3 színre. (1 pont)
   Van tehát 3 különböző színű pontja, mondjuk a, b és c. Valamelyik új csúcsnak (mondjuk x-nek) pontosan e három csúcs a szomszédja, ezért x nem kaphatja a 3 rendelkezésre álló szín valamelyikét, ellentmondás. (2 pont)
   A kapott ellentmondás azt mutatja, hogy 3 szín nem elég G csúcsainak kiszínezéséhez, tehát $\chi(G) = 4$. (1 pont)

2. Határozzuk meg a nemnegatív p paraméter összes olyan értékét, melyre a fenti hálózatban a maximális st-folyam nagysága (értéke) a lehető legnagyobb.

   Először $p = 0$-ra keresünk egy maximális nagyságú folyamot az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Ekkor egy 16 nagyságú folyamot kapunk, és egy annak maximalitását bizonyító, a sűrűn szaggatott vonallal jelzett, X által indukált, $32 + p$ kapacitású st-vágást. (2 pont)
   Most $p = \infty$ választással tovább növelve a folyamot, az ábrán látható, 46 nagyságú folyamot kapjuk, (1 pont)
   amelynek maximalitását a ritkán szagatott vonallal jelzett, Y által indukált, 46 kapacitású st-vágás bizonyítja. Ez az st-vágás nem tartalmazza a p kapacitású élt. (2 pont)
   Ezek szerint bármekkorának is választjuk p értékét, 46-nál nagyobb st-folyam nem lehetséges a hálózatban. (1 pont)
   A 46 nagyságú st-folyam elérhető, az pl. az ábrán látható módon. (1 pont)
   A $32+p$ kapacitású vágás miatt ehhez p értékét legalább $46-32 = 14$-nek kell választani. (1 pont)
   A $p = 14$ választás mellett elérhető a 46 nagyságú folyam, pl az ábrán megadott módon. (1 pont)
   A válasz tehát $p \geq 14$. (1 pont)



3. Tegyük fel, hogy a 88 pontú G páros gráf egy lefogó élhalmaza független élekből áll. Határozzuk meg $\tau(G)$ értékét, azaz a G-t lefogó pontok minimális számát.

   A G gráf egy lefogó élekből álló független élhalmaz definíció szerint a G egy teljes párosítása. (3 pont)
   Mivel G-nek 88 csúcsa van, ezért ez az élhalmaz 44 élből áll, (2 pont)
   vagyis G-ben a független élek maximális száma $\nu(G) = 44$. (2 pont)
   A G gráf páros, ezért Kőnig tanult tétele szerint $\tau(G) = \nu(G) = 44$. (3 pont)

4. Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf A színosztálya 28, a B színosztálya 33 pontú. Tegyük fel, hogy a B színosztálynak valemely Y részhalmazára $|Y| = 18$ és $|N(Y)| = 12$. Mutassuk meg, hogy az A színosztályra nem teljesül a Hall feltétel, azaz létezik olyan $X \subseteq A$ halmaz, melyre $|N(X)| < |X|$.

Legyen $X := A \setminus N(Y)$. (3 pont)
Mivel Y-nak egyetlen szomszédja sincs X-ben, ezért X-nek sincs szomszédja Y-ban, azaz $N(X) \subseteq B \setminus Y$. (3 pont)
Az X halmaz mérete $|X| = |A| - |N(Y)| = 28 - 12 = 16$, míg $|B \setminus Y| = |B| - |Y| = 33 - 18 = 15$. (2 pont)
Ezek szerint $|N(X)| \leq |B \setminus Y| = 15 < 16 = |X|$, tehát X-re csakugyan nem teljesül a feladatban idézett Hall feltétel. (2 pont)
Avagy.
A Hall tétel szerint pontosan akkor teljesül A-ra a Hall feltétel, ha G-nek van A-t fedő párosítása. (3 pont)
Azt kell tehát igazolnunk, hogy G-nek nincs A-t fedő párosítása, más szóval, hogy $\nu(G) < 28$. (2 pont)
Tekintsük G egy maximális ($\nu(G)$ méretű) M párosítását. Mivel a B színosztály 18 pontú Y részhalmazának csak 12 szomszédja van, ezért M az Y-nak legfeljebb 12 pontját fedheti, (2 pont)
azaz Y-nak legalább 6 pontja fedetlen. (1 pont)
Így B-nek is legalább 6 pontját nem fedi M, (1 pont)
tehát $|M| \leq |B| - 6 = 27$, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

5. Abszurdisztán adóhivatala egy papírfecnin szerzett értesülés nyomán szeretne felderíteni bizonyos ÁFA-csalásokat. A szövevényes bűnügy felgöngyölítéséhez elkészítettek egy G gráfot, melynek pontjai a gyanús cégeknek felelnek meg és G két csúcsa között akkor fut él, ha a két szóban forgó cég egyike számlát állított ki a másiknak. Az adatok gondos analízise nyomán az derült ki, hogy minden gyanús cégnek legalább hat másik gyanús céggel volt már közös számlázási ügye. A nyomozás sikerének pedig az a kulcsa, hogy ez a G gráf átlátható legyen, azaz, hogy G-t úgy lehessen lerajzolni egy dátummal, pecséttel és aláírással ellátott okmányra, hogy élek belső pontban ne keresztezzék egymást. (Ha ugyanis eredménytelen marad a próbálkozás, akkor sajnos képtelenség felderíteni az csalásokat.) Sikerül-e vajon nyakon csípni az elvetemült bűnözőket?

Azt kell eldöntenünk, hogy a kérdéses G gráf síkbarajzolható-e. (1 pont)
A konstrukció folytán G egyszerű, (1 pont)
így ha G síkbarajzolható, akkor a tanult tétel értelmében legfeljebb $3n - 6$ éle lehet, ahol n a G csúcsainak száma. (4 pont)
(Persze az is kell, ehhez, hogy $n \geq 3$, de ez következik a legalább 6-os fokszámokból.) (0 pont)
Mivel G-nek minden fokszáma legalább 6, ezért G csúcsainak fokszámösszege legalább $6n$, vagyis G-nek legalább $3n$ éle van. (3 pont)
Ez pedig a fentiek alapján ellentmond annak, hogy G síkbarajzolható, (1 pont)
vagyis nem várthatjuk a hivataltól a bűnözők megregulázását. (1 pont)
A példa ereteti megszövegezése alkalmas lehetett arra, hogy a közigazgatás, az adóigazgatás csúcsszervébe vetett közbizalmat, közmegbecsülést hátrányosan befolyásolja. Ezért ezúton elnézést kérünk.

6. Oldjuk meg a $7x \equiv 8 \pmod{177}$ lineáris kongruenciát.

Mivel 7 és 177 relatív prímek, ezért a kongruencia megoldható, és a megoldások halmaza egy modulo 177 maradékosztály. (2 pont)
A megoldás során az előadáson megbeszéltek értelmében eltekintünk a mod karaktersorozat kiírogatásától. Egészítsük ki a $7x \equiv 8(177)$ lineáris kongruenciát a triviális $177x \equiv 0(177)$ kongruenciával. A kapott kongruenciarendszer megoldásai pontosan azok az x egészek lesznek, melyek megoldják az eredeti kongruenciát. (2 pont)
A második kongruenciát helyettesítjük azzal, amit úgy kapunk, hogy a másodikból kivonjuk az első 25-szörösét: $177x - 175x = 0 - 200(177)$. (2 pont)
Ez utóbbi kongruenciában a -200-at vele kongruenssel helyettesítva az alábbi kongruenciarendszer adódik: $7x \equiv 8(177)$ ill $2x \equiv -23(177)$. (1 pont)
A második kongruencia 3-szorosát az elsőből kivonva azt kapjuk, hogy $x = 7x - 6x \equiv 8 - 3 \cdot (-23) = 77(177)$, (2 pont)
tehát a kongruencia megoldása $x \equiv 77(177)$. (1 pont)
(Ha most ez utóbbi kongruencia kétszeresét kivonnánk a $2x \equiv 23(177)$ kongruenciából, akkor a $0x \equiv -23 - 2 \cdot 77 = -177 \equiv 0(177)$ adódna, de erre nincs szükség az első megjegyzés miatt.)
Természetesen a lineáris kongruencia megoldható más, a fentitől eltérő módszerrel is, és a helyesen alkalmazott helyes módszer szerint megkapott helyes végeredmény értelemszerűen 10 pontot ér.