

A Számítástudomány alapjai

1. ZH javítókulcs (2011.10.13.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. A Mikulás öt pendrive-ot hozott, amik egyenként 1, 3, 5, 7 és 9 gigabájtosak. Öcsénkkel kell ezeken megosztoznunk. Hányféleképp tehetjük ezt meg, ha a mi memóriáink kapacitásainak összegének testvérünkéiéinél mindenképpen nagyobbak kell lennie, és tökéletesen igazságosnak érezzük azt is, ha az összes eszköz nekünk jut?

Az ötféle ajándékból $2^5 = 32$ -féle részhalmaz képezhető. (2 pont)

Ezekből kell azok számát meghatározni, amit ajándékba kaphatunk a magunk támasztotta önző feltétel betartásával. (1 pont)

Mivel az öt kapacitás összege 25, azokat a részhalmazokat kell leszámolnunk, ahol a megfelelő összkapacitás legalább 13 Gb. (1 pont)

Vegyük észre, hogy bármely részhalmaz és a komplementere közül pontosan az egyiknek lesz az összkapacitása legalább 13 Gb, (5 pont)

ezért az összes lehetséges részhalmaznak a fele, azaz $2^4 = 16$ a keresett részhalmazok száma, és egyúttal ez a válasz a feladat kérdésére is. (1 pont)

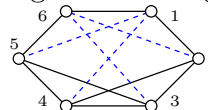
Természetesen az első 4 pont megszerzése után úgy is befejezhető a megoldás, hogy izomból leszámoljuk a megfelelő részhalmazokat, pl úgy, hogy 1-elemű nincs, két eleműből van 2, három eleműből 8, négy eleműből 5 végül 5-eleműből 1.

2. Rajzoljuk le azt a G gráfot (pontosabban annak egy diagramját), aminek szomszédossági mátrixa

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Legkevesebb hány élt kell G -be behúzni az egyszerűség megtartásával úgy, hogy reguláris gráfot kapjunk?

A tanultak szerint akkor fut él két csúc között, ha a szomszédossági mátrix megfelelő mezejében 1-es



található. Ennek alapján G a fekete, folytonos élek alkotta gráf: (5 pont)

G -ben a csúcsok fokszámai 2 ill. 3. Ha G -t 3-reguláris gráffá akarjuk kiegészíteni, akkor a két másodfokú csúc közé élt kellene behúznunk, amit nem tehetünk meg az egyszerűség megtartásával. (2 pont)

Tehát legalább 4-reguláris gráfot kell készítenünk, azaz a két másodfokú pontból még legalább 2 – 2 élt kell behúznunk, összesen tehát legalább 4-et. (2 pont)

Ezt meg is tudjuk tenni, pl az ábrán látható kék, szaggatott éleket behúzva, tehát 4 a válasz a kérdésre. (1 pont)

3. Tekintsük az $(1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 10)$, $(4, 3, 2, 7, 6, 5, 9, 8)$ és $(1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8)$ Prüfer-kódú fákat. Alkossák a G gráf élhalmazát ezen fák élei azzal, hogy ha két csúc k fában szomszédos, akkor G -ben az adott élnek k párhuzamos példánya található. Van-e G -nek Euler-köre?

Mindhárom Prüfer-kód 8 hosszúságú, ezért 10 címkézett pontja van a G gráfnak (2 pont)

Mivel mindegyik fa összefüggő, ezért uniójuk, G is az. (1 pont)

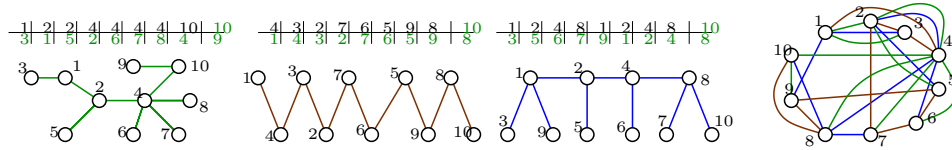
Az órán azt tanultuk, hogy véges összefüggő gráfnak pontosan akkor van Euler-köre, ha minden csúcsa páros fokú. (2 pont)

Olyat is tanítottak, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs eggyel kevesebbszer szerepel, mint a fabeli fokszáma. (2 pont)

Ha gondosan összeszámoljuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy az $1, 2, \dots, 10$ címkék mindegyike páratlan sokszor szerepel a 3 Prüfer-kódban, és ennél az előfordulási számnál a fokszáma 3-mal nagyobb. (2 pont)

Ez azt jelenti, hogy G -ben minden csúcs fokszáma páros lesz, ezért a fentiek miatt G -nek van Euler-köre. (1 pont)

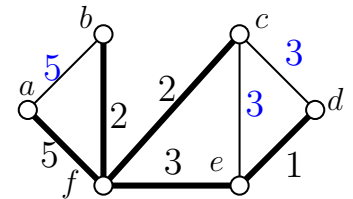
(Ha vki megkonstruálja a 3 fát, észreveszi, hogy összefüggő, és azon számolgat fokszámokat, az is teljes pontszámot ér. Ha vmik fát elrontja, akkor rontott fánként 1-1 pontot levonunk. Ha ezen az úton próbálkozik, de kiderül, hogy nem tud Prüfer-kódot dekódolni, akkor max 5 pont jár.) Itt vannak egyébként a G -t alkotó fák és G :



4. Az ábrán látható G gráfnak megjelöltük egy F feszítőfáját és a feszítőfa éleinek súlyait. Határozzuk meg, mennyi lehet a G gráf feszítőfán kívüli éleinek minimális összsúlya akkor, ha F minimális súlyú feszítőfája G -nek.

Ahhoz, hogy F minimális súlyú feszítőfa legyen az szükséges, hogy a fába be nem választott él bármelyikét ha becseréljük a két végpontja között futó fabeli út valamelyik élére, attól a keletkező fa súlya ne csökkenhessen, (3 pont)

azaz bármely fán kívüli él súlya legalább annyi legyen, mint a végpontjai között futó F -beli úton levő élék súlyainak maximuma. (3 pont)



Ez konkrétan azt jelenti, hogy az ab él súlya legalább 5, a cd élé legalább 3, végül a ce él is legalább 3 súlyú. (2 pont)

Ha pedig ezeket a súlyokat adjuk a fenti éléknek, akkor az órán tanult Kruskal algoritmus meg tudja találni az F fát. (1 pont)

Az tehát a válasz, hogy a maradék élék összsúlya legalább $5 + 3 + 3 = 11$. (1 pont)

5. Az F fa Prüfer kódja $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)$. Hány élé van F komplementerének?

A Prüfer kód hossza 10, ezért az általa kódolt feszítőfának 12 csúcsa van. (2 pont)

Ezért az F feszítőfa élszáma 11. (3 pont)

A 12 pontú teljes gráf éleinek száma $\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 6 \cdot 11 = 66$, (3 pont)

ezért a komplementernek $66 - 11 = 55$ élé van. (2 pont)

Természetesen nem tilos F meghatározása sem. Aki csak ennyit tesz, annak az első 5 pont jár.

6. Tegyük fel, hogy a 16 pontú K_{16} teljes gráf éleit 4-féle színnel színeztük ki úgy, hogy minden egyes színre az adott színnel színezett élék reguláris gráfot alkotnak K_{16} csúcsain. Igazoljuk, hogy kiválasztható két szín a 4 közül úgy, hogy az e két színnel színezett élékből található K_{16} -nak Hamilton köre.

Válasszuk ki azt a két színt, amikből a lehető legtöbb azonos színű él indul a csúcsokból. Mivel K_{16} minden csúcsából 15 él indul amiket 4-félre színeztünk, ezért a két leggyakoribb színből legalább az élék fele, azaz legalább 8 él indul. (4 pont)

Ha tehát G az a gráf, amit a két kiválasztott színnel színezett élék alkotnak, akkor G olyan reguláris gráf, amiben minden csúcsnak legalább 8 a fokszáma (2 pont)

Az órán tanult Dirac tétel szerint ha egy gráfban minden csúcsból legalább annyi él indul, mint a csúcsok számának a fele, akkor a gráfban van Hamilton kör. (3 pont)

Jelen esetben teljesül a fenti Dirac feltétel, ezért G -nek van Hamilton köre, ami éppen a feladat állítását bizonyítja. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

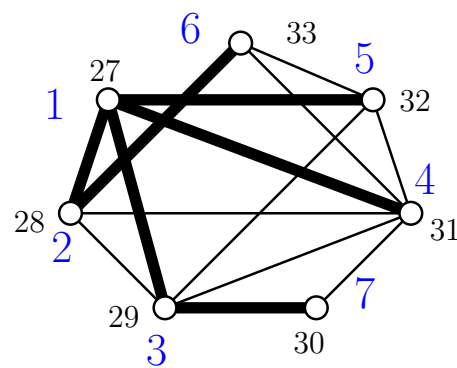
1. Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{27, 28, \dots, 33\}$, él pedig akkor fusson két csúcs között, ha indexeik relatív prímek: $E = \{ij : (i, j) = 1\}$. Rajzoljuk le G diagramját, indítsunk a „27” csúcsból szélességi bejárást, valamint határozzuk meg a bejáráshoz tartozó fát és a többi csúcsnak a „27” csúcsból való távolságát.

Az ábrán látható G diagramja.

(3 pont)

Az órán tanult BFS algoritmust futtatva a nagyobb, kék számok jelzik az egyes csúcsok szélességi számozását (azaz az elérési sorrendet), a vastagon húzott élek pedig azt mutatják, hogy az adott csúcsot melyik másik csúcsból értük el. (5 pont)

A „27” csúcsból mért távolságok a BFS fán mért távolságokkal azonosak, azaz a 28, 29, 31 és 32 csúcsok 1, míg a 30 és 33 csúcsok 2 távolságra vannak. (2 pont)



2. Az alábbi ábrán látható G gráfban az élekre írt számok az egyes élek kapacitását jelentik. Határozzunk meg az összes irányított st utat lefoglaló élhalmazok közül egy minimális összkapacitásút.

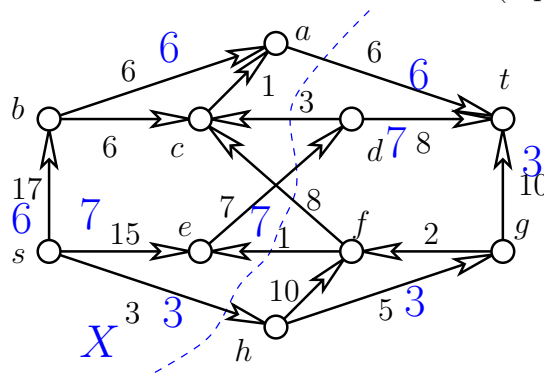
A feladat szerint minimális kapacitású st -vágást kell keresnünk az ábrán megadott hálózatban, és a válasz ennek a vágásnak az s - t tartalmazó részből a t - t tartalmazó részbe futó élei lesznek. (2 pont)

Ehhez maximális nagyságú folyamatot keresünk az órán tanult növelő utas algoritmussal. A kapott folyamatot és a maximalitást bizonyító minimális vágást meghatározó X halmazt a rajzon megjelöltük.

(6 pont)

Ezek szerint az at, ed, sh élek rendelkeznek a feladatban leírt tulajdonsággal: összkapacitásuk 16, és ennél kisebb összkapacitású st -vágás nem létezhet a rajzon jelölt 16 nagyságú folyamat miatt.

(2 pont)



3. A villamosmérnök-hallgatók számára beüzemelték néhány számítógépet. Minden hallgatónak legalább 10 gépre van belépési jogosultsága, minden gépen pedig legfeljebb 7 hallgatónak van felhasználói fiókja. Igaz-e, hogy ekkor bizonyosan leültethetünk minden villamosmérnök-hallgatót egy-egy különböző számítógéphez úgy, hogy mindenki olyan géphez üljön, amire be tud lépni?

Legyenek a G páros gráf színosztályai a villamosmérnök-hallgatók ill. a beüzemelt számítógépek halmazai, és akkor fusson él egy hallgató és számítógép között, ha az adott hallgató be tud lépni az adott gépre, azaz rendelkezik ott felhasználói fiókkal. A cél, hogy olyan párosítás létezését igazoljuk, ami minden hallgatót fed. G -ről annyit tudunk, hogy a hallgató-színosztályban minden fok legalább 10, a számítógép-színosztály tetszőleges csúcsából pedig legfeljebb 7 él indul. (3 pont)

Ehhez a Hall tételt fogjuk használni, ami szerint akkor létezik ilyen párosítás, ha a hallgatók tetszőleges k elemű részhalmazához legalább k olyan beüzemelt számítógép létezik, amin a k hallgató legalább egyikének van felhasználói fiókja. (3 pont)

Tegyük fel, hogy a k hallgatóhoz tartozó számítógépek száma m . Mivel a k hallgatóból G -nek legalább $10k$ él indul és ezen élek mindegyike az m számítógép valamelyikéhez tartozik, ezért a $10k$ él részhalmaza az m számítógép-csúcsból induló legfeljebb $7m$ élnek. (2 pont)

Ezek szerint $10k \leq 7m$, ahonnan $k \leq m$ következik, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk az állítás bizonyításához. (2 pont)

4. Tegyük fel, hogy G olyan gráf, amire $\Delta(G) \leq 3$ és G -nek legfeljebb 5 harmadfokú csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy G síkbarajzolható.

Az órán szerepelt Kuratowski tételt fogjuk felhasználni, ami szerint ha egy G gráf nem síkbarajzolható, akkor tartalmaz $K_{3,3}$ -mal vagy K_5 -tel topologikusan izomorf részgráfot. (3 pont)

Márpedig ha egy gráf $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorf, akkor annak pontosan 6 harmadfokú csúcsa van, így G -nek is legalább hat legalább harmadfokú csúcsának kell lennie, hogy ilyen részgráfja lehessen. (3 pont)

Ha pedig egy gráf K_5 -tel topologikusan izomorf, akkor pontosan 5 negyedfokú csúcsa van, ezért ha G ilyen részgráfot tartalmaz, akkor $\Delta(G) \geq 4$ teljesül. (3 pont)

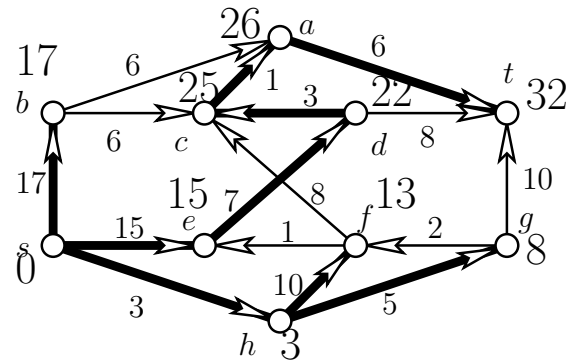
A feladatban szereplő G gráfra mindkét fenti eset elképzelhetetlen, ezért G a Kuratowski tétel miatt bizonyosan síkbarajzolható. (1 pont)

5. Határozzuk meg a fenti ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek.

Az órán tanult módszerrel dolgozunk. Először meghatározzuk G egy topologikus sorrendjét, pl. $s, h, g, f, e, b, d, c, a, t$ -t. (2 pont)

Ezt követően a csúcsokat ebben a sorrendben dolgozzuk fel, azaz meghatározzuk a legkorábbi kezdési időt, és azt az élt (vagy éleket), ami ezt okozza. Az eredmény az ábrán látható. (5 pont)

Ezek szerint a legrövidebb végrehajtási idő $t = 32$, (1 pont) és mivel egyetlen kritikus út vezet s -ből t -be, a kritikus tevékenységek ezen út csúcsai, azaz s, e, d, c, a, t . (2 pont)



6. Tegyük fel, hogy az $n > 5$ egész szám pozitív osztóinak összege $\sigma(n) = n + 1$. Mutassuk meg, hogy n szomszédainak pozitív osztói összegére $\sigma(n - 1) + \sigma(n + 1) \geq 3n + 6$ teljesül.

Mivel $1 \mid n$ és $n \mid n$, ezért $\sigma(n) = n + 1$ csak úgy lehetséges, ha n prímszám. (3 pont)

Az $n > 2$ feltétel miatt n páratlan, ezért $2 \mid n - 1$ és $2 \mid n + 1$, (1 pont)

ezért $\frac{n-1}{2} \mid n - 1$ és $\frac{n+1}{2} \mid n + 1$. (2 pont)

(Ráadásul $n > 5$ miatt $2 < \frac{n-1}{2}$ is teljesül, tehát különböző osztókról van szó.) (0 pont)

Innen azt kapjuk, hogy $\sigma(n - 1) \geq 1 + 2 + \frac{n-1}{2} + (n - 1)$ ill. $\sigma(n + 1) \geq 1 + 2 + \frac{n+1}{2} + (n + 1)$, (2 pont)

ahonnan $\sigma(n - 1) + \sigma(n + 1) \geq 6 + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} + (n - 1) + (n + 1) = 3n + 6$ adódik. Nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (2 pont)

(Az $n > 5$ feltevésre azért volt szükség, mert pl $n = 5$ -re azért nem teljesül a feladat állítása, mert $2 = \frac{n-1}{2}$ miatt $(n - 1)$ -nek csak 3 osztója van. Könnyen látható az is, hogy ilyenkor nem lehet $n - 1$ és $n + 1$ is prímszám kétszerese (hiszen az egyikük 4-gyel is osztható).)

A Számítástudomány alapjai

1. pótZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. Hányféleképpen lehet tombolán kisorsolni 5 különböző nyereményt 3 részvevő között? Hány olyan sorsolás van, ahol minden részvevő legalább egy nyereményt kap? (Két sorsolás akkor különbözik, ha van olyan nyereménytárgy, amit a két sorsoláson nem ugyanaz nyer meg.)

Az öt egymást követő sorsolás meghatározza a nyertesek sorrendjét. Ráadásul a 3 részvevő tetszőleges sorrendje lehet a sorsolás nyertesek sorrendje, azaz a lehetséges nyereménykiosztások kölcsönösen egyértelműen megfelelnek 3 elem 5-ösztályú ismétléses kombinációinak. (3 pont)

Az órán azt tanították, hogy ezek száma 3^5 . (2 pont)

Ha csak azokat a sorsolásokat kell megszámolni, ahol mindenki legalább egy nyereménytárgyat kap, akkor le kell vonni azokat a sorsolásokat, ahol csak legfeljebb 2 nyertes lesz az 5 sorsoláson. (1 pont)

E két nyertest 3-féleképp választhatjuk, és közöttük a fentiek miatt 2^5 -féleképp oszthatjuk szét a nyereményeket. (2 pont)

Ezzel azonban minden olyan sorsolást, ahol minden nyereménytárgy ugyanahhoz a nyerteshez került, kétszer vontunk le. Ezért azt a 3 esetet még hozzá kell adni az eddigi különbséghez, amikor is mindent ugyanaz a nyertes visz. (1 pont)

A végeredmény tehát $3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 =$ (1 pont)

$= 243 - 3 \cdot 32 + 3 = 150$. (0 pont)

Lehet persze másképp is számolni a második részt.

Ha mindenki legalább egy nyereményt nyer, akkor a nyeremények eloszlása $3 + 1 + 1$ vagy $2 + 2 + 1$ lesz. (1 pont)

Az első esetben 3-féle nyereményt $\binom{5}{3} = 10$ -féleképp választhatjuk, a nyertes a 3 játékos bármelyike lehet, a maradék két játékos pedig 2-féleképp osztozhat a két nyereményen, ami $10 \cdot 3 \cdot 2 = 60$ lehetőséget jelent. (2 pont)

A második esetben 5-féle lehet a magányos nyeremény, ami 3-féle játékoshoz kerülhet, míg a maradék 4 nyereményen a maradék két játékos $\binom{4}{2} = 6$ -féleképp osztozhat, ekkor tehát $5 \cdot 3 \cdot 6 = 90$ a lehetőségek száma. Összesen tehát $60 + 90 = 150$ -féle kívánt sorsolás lehetséges. (2 pont)

2. A tankör 35 hallgatójából összesen 25-en nem írták meg az első ZH-t SzA ill. Analízis tárgyak valamelyikéből. Míg SzA-ból 12, addig Analízisből 15 hallgató nem írt dolgozatot. Az érintett 25 hallgatóból hányféleképpen választhatnak olyan 5-tagú panaszbizottságot, hogy abban 3 – 3 olyan hallgató legyen aki nem írta meg az egyes ZH-kat?

Jelölje x és y azon hallgatók számát, akik csak az SzA, ill. csak az Analízis ZH-t nem írták meg, a másikon pedig próbálkoztak. Legyen továbbá z azoknak a hallgatóknak a száma, akik egyik ZH-n sem adtak be dolgozatot. Ekkor a feladat feltételeiből $x + y + z = 25$, $x + z = 12$ és $y + z = 15$ adódik, ahonnan $z = 2$, $x = 10$ és $y = 12$. (3 pont)

Legyen az 5-tagú küldöttségben az egyes típusokból a , b és c hallgató. Ekkor $a + b + c = 5$, $a + c = 3 = b + c$, ahonnan $a = b = 2$ és $c = 1$. (3 pont)

Azt kell tehát megszámolnunk, hogy az egyes hallgatótípusokból hányféleképp választhatjuk ki a küldöttségbe a megfelelő számú hallgatót. Mivel az egyes típusokból a választásaink egymástól függetlenek, (2 pont)

ezért a válasz $\binom{10}{2} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{2}{1}$ lesz. (2 pont)

3. Az egyszerű, irányítatlan, 3-reguláris G gráf szomszédossági mátrixának bizonyos elemei kitörölődtek, csupán az alábbi maradt meg:

$$A(G) = \begin{pmatrix} ? & 1 & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & 1 & ? & 1 & 0 & ? \\ ? & ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & ? & ? & 1 & 1 & ? \end{pmatrix}$$

Rajzoljuk le a G gráfot (pontosabban annak egy diagramját).

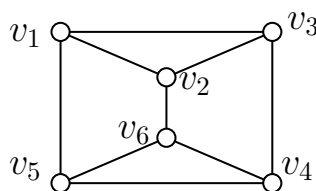
Mivel G egyszerű, ezért nincs benne hurokél, így a szomszédossági mátrix főátlójában csak 0-k szerepelnek. (2 pont)

Irányítatlan gráfról lévén szó a szomszédossági mátrix szimmetrikus, azaz tetszőleges i, j -re ugyanaz a szám áll az (i, j) és a (j, i) helyeken. (2 pont)

Tudjuk még, hogy G 3-reguláris, ezért a mátrix minden sorában és minden oszlopában pontosan 3 a beírt számok összege. (2 pont)

Ennek alapján a mátrix könnyen kiszudokuzható az alábbiak szerint: (2 pont)

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



A jobb oldali ábra pedig G egy lehetséges diagramját mutatja. (2 pont)

4. Tegyük fel, hogy az F fának csak első- és hatodfokú csúcsai vannak, szám szerint n_1 ill. n_6 . Igazoljuk, hogy $n_1 = 4 \cdot n_6 + 2$.

Tanultuk, hogy minden véges gráfban a foksámösszeg az élszám kétszerese, (3 pont)

továbbá, hogy egy n csúcsú fának pontosan $n - 1$ éle van. (2 pont)

Ez F -re nézve azt jelenti, hogy $n_1 + 6n_6 = 2n - 2$, ahol $n = n_1 + n_6$ a G csúcsainak száma. (2 pont)

Innen azt kapjuk, hogy $n_1 + 6n_6 = 2(n_1 + n_6) - 2$, (2 pont)

amit rendezve éppen a bizonyítandó állítást kapjuk: $n_1 = 4 \cdot n_6 + 2$. (1 pont)

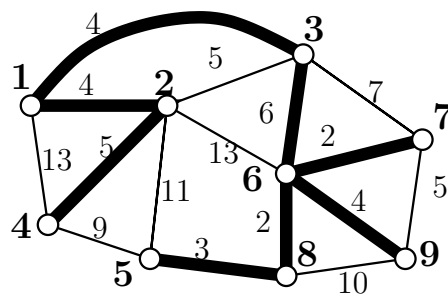
5. Keressük meg a fenti mátrix melletti ábrán látható gráf egy minimális súlyú feszítőfáját és adjuk meg a Prüfer-kódját.

Az órán tanult Kruskal algoritmus segítségével, az élekről a súlyuk növekvő sorrendjében eldöntve, bevegyük-e azokat a megkonstruált feszítőfába, az ábrán vastaggal jelölt minimális súlyú feszítőfát kapjuk. (5 pont)

Ennek a Prüfer-kódját úgy kapjuk, hogy sorra töröljük a legkisebb sorszámú leveleket, és ebben a sorrendben feljegyezzük a levelek szomszédját, (2 pont)

ám az utolsó szomszédot nem vesszük be a kódba. (1 pont)

A leveleket 4, 2, 1, 3, 5, 7, 8, 6 sorrendben töröljük, a szomszédok rendre 2, 1, 3, 6, 8, 6, 6, 9 lesznek, tehát a keresett Prüfer-kód (2, 1, 3, 6, 8, 6, 6). (2 pont)



6. Tudjuk, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf maximális fokszáma $\Delta(G) = 30$, másrészt G -nek van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy a \bar{G} komplementergráfnak is van Euler-köre.

Tanultuk, hogy összefüggő gráfnak pontosan akkor van Euler-köre, ha minden fokszáma páros. (1 pont)

Ezek szerint G -ben minden foksám páros. (2 pont)

A \bar{G} komplementergráfban a v csúcs foka $d_{\bar{G}}(v) = 98 - d_G(v)$, (2 pont)

ezért \bar{G} -ben is páros lesz minden csúcs foka. (2 pont)

Egyedül annak igazolása van hátra, hogy \bar{G} összefüggő. Ez következik pl a Dirac-tételből, hiszen \bar{G} -ben minden fok legalább $98 - 30 = 68 > \frac{99}{2}$ (3 pont)

Az utolsó 2 pont úgy is megszerezhető, hogy ha a \bar{G} -beli minimális foksám több, mint $\frac{n}{2}$ (márpedig ez igaz), akkor bármely két nem szomszédos pontnak van közös szomszédja, és ebből azonnal következik az öf tulajdonság.

A Számítástudomány alapjai

2. pótZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

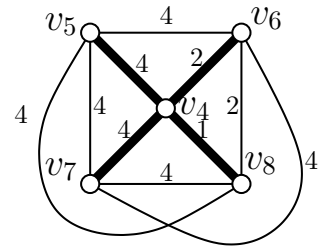
1. Legyen G teljes gráf a $\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ ponthalmazon és a $v_i v_j$ él hossza legyen $l(v_i v_j) = \frac{4}{(i,j)}$. Határozzuk meg a v_4 csúcs távolságát G többi csúcsától. Megváltoztatható-e a $v_7 v_8$ él hossza úgy, hogy v_4 és v_7 távolsága 3 legyen?

Az ábrán látható a G gráf diagramja az élekre írt számok az adott él hosszát jelentik. (3 pont)

A v_4 -től mért távolságokat a v_4 -ből indított Dijkstra algoritmus segítségével határozhatjuk meg. Ennek során v_8, v_6, v_5, v_7 sorrendben érjük el a csúcsokat, mindegyik távolságot a v_4 -ből vezető közvetlen él határozza meg, tehát a legrövidebb utak fája a v_4 közepű csillag lesz. (3 pont)

Ennek alapján a v_5, v_6, v_7 ill. v_8 csúcsok v_4 -től mért távolságai rendre 4, 2, 4, 1 lesznek. (2 pont)

Mivel $dist(v_4, v_7) = 4 > 3$, és $dist(v_4, v_8) = 1$, ezért ha a $v_4 v_8$ él hosszát 2-re változtatjuk 4-ről, akkor v_4 és v_7 távolsága 3 lesz. (2 pont)

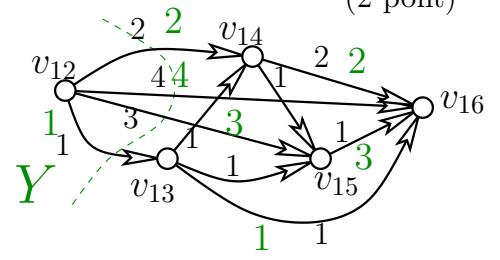
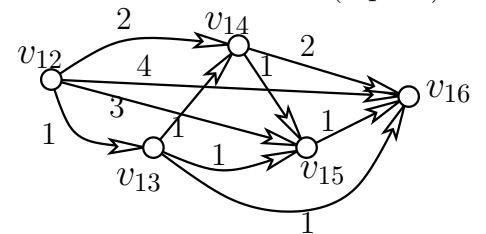


2. A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcshalmaza $V = \{v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$ és $i < j$ esetén a $v_i v_j$ él kapacitása $c(v_i v_j) = (i, j)$, más éle G -nek nincs. Ha a $v_{15} v_{16}$ él kapacitását tetszés szerint megváltoztathatjuk, mennyi lehet a v_{12} -ből v_{16} -ba vezető maximális folyam nagysága? Mekkora az a legkisebb kapacitás a $v_{15} v_{16}$ élen, amire ez a maximális folyam nagyság elérhető?

Az ábrán az adott látható a hálózat diagramja. (2 pont)

Ezen a tanult javító utas algoritmussal kerestünk maximális nagyságú folyamot, mégpedig $av_{12}, v_{16}, v_{12}, v_{14}, v_{16}, v_{12}, v_{13}, v_{16}$ és v_{12}, v_{15}, v_{16} utakon rendre 4-t, 2-t ill. 1-t, 1-t javítva. (Az egyes éleken felvett értéket a kék színű, nagyobb méretű számok jelzik.) A kapott 8 nagyságú folyam maximalitását az X halmaz meghatározta, szaggatottal jelzett 8 kapacitású vágás bizonyítja. (4 pont)

Ha most a $v_{15} v_{16}$ él kapacitását kellően nagynak választjuk, akkor még tovább növelhető a folyam nagysága a v_{12}, v_{15}, v_{16} úton segítségével. Így kapjuk a zölddel jelölt, 10 nagyságú folyamot, aminél nagyobbat nem kaphatunk, hiszen az Y meghatározta vágás kapacitása 10, és ez a vágás nem tartalmazza a $v_{15} v_{16}$ élt. (2 pont)



Ahhoz, hogy az X által meghatározott vágás kapacitása legalább 10 legyen, a $v_{15} v_{16}$ él kapacitását legalább 3-ra kell növelni, tehát ekkora növelés feltétlenül szükséges a 10 nagyságú folyamhoz. Láttuk, hogy ez elég is, tehát, 3 a legkisebb olyan kapacitás, amire ez elérhető. (2 pont)

3. Tekintsük a k -szorosán pontösszefüggő G gráf két diszjunkt példányát és kössük össze a két példányban az egymásnak megfelelő pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott G' gráf $(k + 1)$ -szeresen összefüggő.

Mivel G k -öf volt, ezért $|V(G)| \geq k + 1$, tehát $|V(G')| = 2 \cdot |V(G)| > k + 1$ is teljesül, ami az egyik feltétel ahhoz, hogy G' k -öf legyen. (1 pont)

A k -szoros pontösszefüggőség definíciója szerint tehát mindössze azt kell ellenőriznünk, hogy ha G' nem eshet szét legfeljebb $k - 1$ csúcs elhagyásától. (3 pont)

Tegyük fel tehát, hogy elhagytunk legfeljebb $k - 1$ csúcsot G' -ből. Mivel G k -öf, ezért G semelyik diszjunkt példánya sem esett szét, (2 pont)

így mindössze azt kell igazolnunk, hogy maradt a két rész között is él, azaz van olyan csúcs, amit G egyik példányában sem töröltünk. (2 pont)

Ez utóbbi pedig azért igaz, mert G -nek legalább $k - 1$ csúcsa van a k -öf tulajdonság miatt, így olyan csúcsának is kell lennie, aminek egyik példányát sem bántottuk a legfeljebb $k - 1$ csúcs törlésekor. (2 pont)

4. Tegyük fel hogy 77 iskolás levelez egymással úgy, hogy mindegyiküknek pontosan 8 levelezőpartnere van. Megvalósítható-e, hogy a levelezéshez 8-féle színű borítékot használnak úgy, hogy mindenki különböző színű borítékot használjon az egyes levelezőpartnereihez, és bármely két levelezőtárs között mindkét irányú levélforgalomhoz azonos színű borítékot használjanak?

Legyenek a $G = (V, E)$ gráf csúcsai az iskolások, él pedig akkor fusson két csúcs között, ha az adott iskolások leveleznek. A feladat feltételeiből G -nek 77 csúcsa van és 8-reguláris. A borítékokra a feladatban megkívánt feltétel pedig pontosan G 8-élszínezhetőségét jelenti, a célunk tehát ennek eldöntése. (3 pont)

Tegyük fel indirekt, hogy G 8-élszínezhető. Ekkor az azonos színű élek G egy párosítását alkotják. (2 pont)

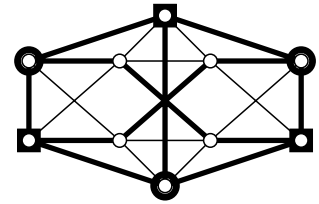
Mivel 8 színt használtunk, és minden csúcsból 8-féle színű él indul, ezért az azonos színű élek teljes párosítást alkotnak minden egyes szín esetén. (3 pont)

Azonban G -nek 77 csúcsa lévén nem létezhet teljes párosítása, az indirekt feltevésünk tehát nem helytálló, G élei nem színezhetők 8 színnel, a borítékokra a feladatban megkívánt elvárás nem teljesíthető. (2 pont)

5. Síkbarajzolható-e az ábrán látható gráf?

A vastaggal jelölt élek által alkotott részgráf a $K_{3,3}$ gráf egy soros bővítése, ahol a kerek csúcsok a kutak, a négyszögletesek a házkak. (8 pont)

Tanultuk, hogy $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható, így annak soros bővítése sem az, tehát a feladatban szereplő gráf sem síkbarajzolható. (2 pont)



6. Számítsuk ki a $10! + 99$ és $9! + 9$ számok legnagyobb közös osztóját.

Az Euklideszi algoritmus kapcsán azt tanították, hogy $(a, b) = (a - b, b) = \dots = (a - kb, b)$ tetszőleges k egész számra. (2 pont)

Ezek szerint $(10! + 99, 9! + 9) = (10! + 99 - 10(9! + 9), 9! + 9) = (9, 9! + 9) = (9! + 9, 9) = (9! + 9 - (8! + 1) \cdot 9, 9) = (0, 9) = 9$ (7 pont)

A keresett ltko tehát 9. (1 pont)

Természetesen közvetlenül az Euklideszi algoritmussal is megoldható a feladat.

A Számítástudomány alapjai

1. ppZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenként az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

1. A 174 fős villamosmérnök-évfolyam hallgatói 4-féle tárgyat hallgatnak, mindegyiket ugyanannyian vették fel, minden hallgató felvett legalább egy tárgyat. Senki sincs, aki mind a négy tárgyat felvette, de bármely három tárgyhoz pontosan egy olyan hallgató van, aki azok mindegyikére jár. Ezen kívül bárhogy is választunk két tárgyat a négyből, pontosan 5 olyan hallgató van, aki mindkettőt felvette. Hány villamosmérnök-hallgató jár az egyes kurzusokra?

Tegyük fel, hogy a négy kurzus mindegyikét k hallgató vette fel, ezek alkotják az A_1, A_2, A_3 és A_4 halmazokat. A feladat szerint $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 174$. (2 pont)

Az órán tanult szita-formula szerint a halmazok uniójának méretét úgy is megkaphatjuk, hogy a halmazok méretének összegéből levonjuk a páronkénti metszetek méretének összegét, hozzáadjuk az összes hármas metszet méretének összegét, majd levonjuk a 4 halmaz metszetének méretét. (4 pont)

Páronkénti metszetből összesen $\binom{4}{2} = 6$, míg hármas metszetből $\binom{4}{3} = 4$ van, az összes halmaz metszetét pedig egyféleképp lehet képezni, ráadásul az üres. (2 pont)

Ezek alapján $174 = 4k - 6 \cdot 5 + 4 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 4k - 26$, (1 pont)

anonnan $200 = 4k$ ill. $k = 50$ adódik. Ennyien járnak tehát az egyes kurzusokra. (1 pont)

2. Hét villamosmérnök-hallgatóról tudjuk, hogy közülük bármely kettőnek van közös beszédtemája, mégpedig 3 lehetséges téma (táplálkozás, hardware, ellentétes nem) valamelyike. (Lehetséges pl, hogy a és b ill. a és c témája megegyezik, de különbözik b és c közös témájától.) Igazoljuk, hogy kiválasztható a 7 hallgató közül néhány (de legalább 3) olyan, akik körbeülhetnek úgy egy kerek asztalt, hogy az egymás mellett ülőknek ugyanaz legyen a közös témájuk.

Alkossa a 7 szóban forgó hallgató a G gráf csúcsait, és jelölje E_i $i = 1, 2, 3$ esetén azokat az éleket amit azok közé a hallgatók közé húzunk, akiknek a közös témájuk éppen az i -dik. (2 pont)

Mivel bármely két hallgató közti él az E_1, E_2 ill. E_3 valamelyikébe beletartozik, ezért ezen élek összesen annyian vannak, mint ahány él behúzható 7 csúcs közé, (2 pont)

szám szerint $\binom{7}{2} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 = 21$ -en. (1 pont)

Kell lennie tehát olyan i témának, hogy $|E_i|$ legalább $\frac{21}{3} = 7$ élt tartalmaz. (1 pont)

Tanultuk, hogy egy n pontú körmentes gráfnak legfeljebb $n - 1$ éle lehet, (2 pont)

ezért ez az E_i élhalmaz biztosan tartalmaz kört. (1 pont)

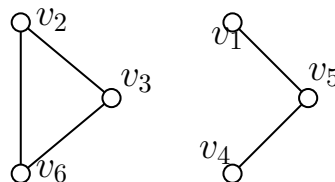
Az e kör csúcsainak megfelelő hallgatókat a körnek megfelelően leültetve pedig éppen a feladat állítását igazoljuk. (1 pont)

3. Összefüggő-e az a G gráf, aminek a szomszédossági mátrixa az alábbi?

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

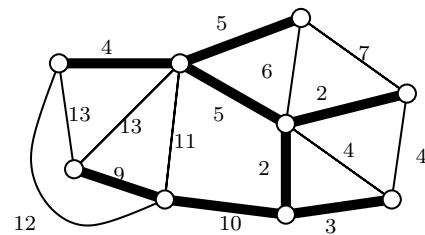
A jobb oldali ábrán látható a kérdéses gráf egy diagramja. (5 pont)

Szemlátomást nem vezet él a v_2, v_3, v_6 csúcsokból a v_1, v_4 ill. v_5 csúcsok egyikébe sem, ezért G nem összefüggő. (5 pont)



4. Legyen F az ábrán látható G gráf egy minimális súlyú feszítőfájának élhalmaza. Van-e a $G - F$ gráfnak Euler-köre?

Az órán tanult Kruskal algoritmus segítségével meghatározzunk egy minimális súlyú feszítőfát. Ennek során minden élről (növekvő súly-sorrendben) eldöntjük, hogy bevesszük-e, mégpedig annak alapján, hogy kört hoz-e létre az eddig bevett élekkel. Az algoritmus bármely lefutása ugyanazt az F feszítőfát találja meg, amit az ábrán vastag élekkel jelöltünk.



(6 pont)
(4 pont)

Ha vki nem (vagy nem jól) találja meg F -t, de helyesen idézi fel az összefüggő gráfok Euler-köréről szóló szükséges és elégséges feltételt (az összefüggőséget is helyesen beleszöve az idézetbe), az kapjon ezért a részért 3 pontot.

5. Legyen G olyan véges gráf, aminek C egy Hamilton köre. Tegyük fel, hogy a $G - C$ gráfnak van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy ekkor a G gráfnak is van Euler-köre.

Mivel a $G - C$ gráfnak van Euler-köre, ezért $(G - C)$ -ben minden fokszám páros. (3 pont)

A G gráfban minden fokszám 2-vel nagyobb, mint a $G - C$ -beli megfelelő fokszám, hiszen C -ből minden csúcsra pontosan két él illeszkedik. (2 pont)

Ez azt jelenti, hogy G -ben is igaz, hogy minden csúcs foka páros. (1 pont)

A G gráf összefüggő, hiszen C egy Hamilton köre. (1 pont)

A véges összefüggő gráfokról pedig azt tanítoták, hogy ha minden fokszámuk páros, akkor van Euler-körük. (2 pont)

Ezek szerint G -nek valóban van Euler-köre, ahogyan azt a feladat állítja. (1 pont)

(Ha vki azzal indokolja G összefüggőségét, hogy $(G - C)$ -nek van Euler köre, az nem kapja meg az összefüggőségért járó 1 pontot, és aki egyáltalán nem gondol az összefüggőségre, az a tételkimondásért járó 2 pontból is egyet elveszít.)

6. Legyen G a $(2, 3, 7, 2, 4, 3, 3, 2)$ Prüfer-kódú F fa komplementere. Van-e G -nek Hamilton-köre?

Mivel a Prüfer-kód hossza 8, ezért F -nek 10 csúcsa van. (1 pont)

Tanultuk, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs eggyel kevesebbszer szerepel, a fokszámánál, (2 pont)

Ezek szerint F -ben a maximális fokszám a 4. (1 pont)

Mivel G az F komplementere, G -ben a minimális fokszám $9 - 4 = 5$ lesz, vagyis G bármely csúcsának fokszáma legalább 5. (2 pont)

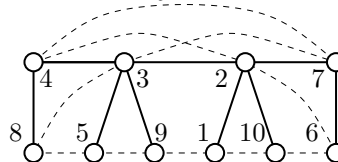
Dirac tétele szerint ha egy n csúcsú gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G -ben van Hamilton kör. (3 pont)

Ez a tulajdonság fennáll a feladatbeli G gráfra $n = 10$ -re, tehát a Dirac tétel szerint annak van Hamilton köre, és nekünk pontosan ezt kellett bizonyítanunk. (1 pont)

Lehet persze favágással is.

Az órán tanultak szerint megkonstruáljuk a kérdéses F fát a Prüfer-kódjából. F -nek 10 pontja van, hisz a kód hossza 8. A táblázat alsó sora a letörölt leveleket mutatja:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 2 | 3 | 7 | 2 | 4 | 3 | 3 | 2 | 10 |
| 1 | 5 | 6 | 7 | 8 | 4 | 9 | 3 | 2 |



(5 pont)

Az a kérdés, hogy van-e az F fa összes csúcsát tartalmazó olyan kör, aminek egyik éle sem esik egybe F valamelyik élével. (2 pont)

Ha ügyesek vagyunk, könnyen találunk ilyen kört. Egyet pl szaggatott vonalakkal rajzoltunk az ábrába. (2 pont)

Az tehát a válasz, hogy a G gráfnak van Hamilton köre. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

2. ppZH javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.

Természetesen az ismertettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész-megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában 1 pontot vonunk le.

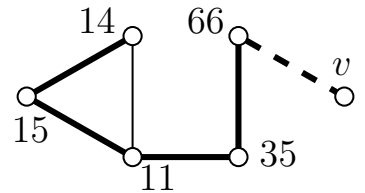
- Legyen $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{11, 14, 15, 35, 66\}$, él pedig akkor fusson két csúc között, ha azok relatív prímek: $E = \{ij : (i, j) = 1\}$. Határozzuk meg G -nek egy a „15” csúcsból indított szélességi bejárásához tartozó fáját! A G' gráfot úgy kaptuk, hogy G -hez hozzávettünk egy új v csúcsot, amit G bizonyos csúcaival összeköttöttünk. Tudjuk, hogy G' -ben a 15 és v csúcsok távolsága 4. Határozzuk meg G' -t!

Az ábrán a G egy diagramja látható. (3 pont)

A „15” csúcsból indított szélességi bejárás a csúcsokat 15, 14, 11, 35, 66 sorrendben éri el, és a kapott szélességi fát a vastagon rajzolt élek jelzik. (3 pont)

Ha a v csúcs távolsága a „15” csúctól 4, az azt jelenti, hogy v -nek van egy a „15” csúctól 3 távolságra levő szomszédja, és nincs olyan szomszédja, ami legfeljebb 2 távolságra van a „15” csúctól. (2 pont)

Mivel G -ben a „15” csúctól legtávolabb a „65” csúcs található, és ennek 3 a távolsága, a v csúcs csakis ezzel a csúccsal van összekötve G' -ben. (2 pont)

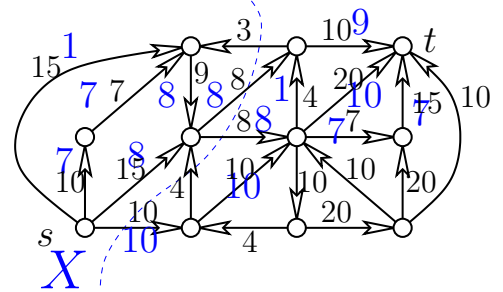


- Határozzuk meg a mellékelt ábrán látható hálózatban a maximális st -folyam nagyságát.

Az órán tanult növelő utas algoritmussal kaptuk az ábrán látható folyamat; a nagyobb, kék számok jelzik az egyes éleken a folyam értékét, ahol nincs szám, ott 0 a folyam értéke, azaz nem folyik folyam. (5 pont)

Ennek a folyamnak a nagysága 26. (2 pont)

Mivel a szaggatott vonallal jelzett X halmaz által indukált st -vágás 26-os kapacitása felső korlát bármely folyam nagyságára, ezért valóban 26 a keresett folyam nagyság. (3 pont)



- Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, élei pedig $E = \{v_i v_j : \frac{(i+j)}{(i-j)} \in \mathbb{Z}\}$. Határozzuk meg a $\nu(G)$, $\tau(G)$, $\alpha(G)$, $\rho(G)$ paramétereiket.

A mellékelt ábrán látható a kérdésben szereplő gráf egy diagramja. (3 pont)

Mivel G -ben sem izolált pont, sem hurokél nincs, ezért Gallai tételei miatt $\nu(G) + \rho(G) = \alpha(G) + \tau(G) = 6$. (1 pont)

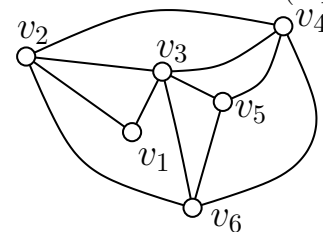
Mivel $v_1 v_2, v_3 v_5$ és $v_4 v_6$ teljes párosítást alkot, ezért $\nu(G) = 3$ (2 pont)

és (Gallai miatt) $\rho(G) = 3$. (1 pont)

Másrészt a v_1, v_2 ill a v_3, v_4, v_5, v_6 pontok klikket alkotnak, így egy független ponthalmaz közülük legfeljebb egyet-egyét tartalmazhat. Ezek szerint $\alpha(G) \leq 2$. (1 pont)

Mivel $\{v_1, v_5\}$ független ponthalmaz, ezért $\alpha(G) = 2$, (1 pont)

így Gallai miatt $\tau(G) = 4$. (1 pont)

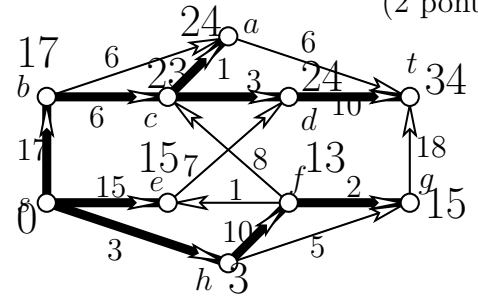


- Határozzuk meg a mellékelt ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítjuk meg, mik a kritikus tevékenységek.

Az órán tanult módszerrel dolgozunk. Először meghatározzuk G egy topologikus sorrendjét, pl. $s, h, f, g, e, b, c, d, a, t$ -t. (2 pont)

Ezt követően a csúcsokat ebben a sorrendben dolgozzuk fel, azaz meghatározzuk a legkorábbi kezdési időt, és azt az élt (vagy éleket), ami ezt okozza. Az eredmény az ábrán látható. (5 pont)

Ezek szerint a legrövidebb végrehajtási idő $t = 34$, (1 pont) és mivel egyetlen kritikus út vezet s -ből t -be, a kritikus tevékenységek ezen út csúcsai, azaz s, b, c, d, t . (2 pont)



5. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 11 csúcsa van és síkbarajzolható. Igazoljuk, hogy a \overline{G} komplementergráf nem síkbarajzolható.

Tanították, hogy egy n csúcsú, egyszerű, sr gráfnak $n > 3$ esetén legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. (3 pont)

Jelen esetben ez azt jelenti, hogy G -nek legfeljebb $3 \cdot 11 - 6 = 27$ éle lehet. (3 pont)

Ezért aztán \overline{G} élszáma legalább $\binom{11}{2} - 27 = 55 - 27 = 28$ lesz, (3 pont)

tehát az elsőnek idézett ok miatt \overline{G} nem síkbarajzolható. (1 pont)

6. Határozzuk meg, hogy a 3^{33} szám kettes számrendszerben felírt alakjának mi az utolsó hat jegye!

Azt kell megállapítanunk, hogy 3^{33} milyen maradékot ad 2^6 -tal osztva, és hogy ezt a maradékot kell felírnunk kettes számrendszerben. (3 pont)

Mivel $(3, 2^6) = 1$, (1 pont)

és $\varphi(2^6) = (2 - 1) \cdot 2^5 = 32$, (1 pont)

ezért alkalmazhatjuk az Euler-Fermat tételt, ami szerint $3^{\varphi(2^6)} = 2^{32} \equiv 1(2^6)$ (2 pont)

Innen $3^{33} = 3^{32} \cdot 3 \equiv 1 \cdot 3 = 3(2^6)$ (2 pont)

tehát 3^{33} utolsó hat jegye 2-es számrendszerben $\dots 000011$. (1 pont)