Bevezetés a számításelméletbe

9. gyakorlat 2001. november 13.

Katona Gyula

1. Legyen V a legfeljebb 4-odfokú valós együtthatós polinomok szokásos vektortere. Válasszuk ki az alábbi leképezések közül a bilineáris függvényeket és írjuk fel a mátrixukat a szokásos bázisban.

   (a) fg

   (b) $f(1) + g(1)$

   (c) $f(1)g(2)$

   (d) $f'(1)g(2)$

2. Legyen V egy bázisa $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n$. Hogyan változik egy $\mathbf{A}$ bilineáris függvény mátrixa, ha

   (a) $\underline{b}_1$-et és $\underline{b}_2$-t felcseréljük;

   (b) $\underline{b}_3$ helyett $\lambda\underline{b}_3$-at veszünk ($\lambda \neq 0$);

   (c) $\underline{b}_3$ helyett $\underline{b}_3 + \lambda\underline{b}_2$-t veszünk?

3. A $V \to \mathbb{R}$ lineáris leképezéseket lineáris függvényeknek nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges bilineáris függvény előáll $\mathbf{A}(\underline{u}, \underline{v}) = \sum \Phi(\underline{u})\Psi(\underline{v})$ alakban, ahol $\Phi(\underline{v})$ és $\Psi(\underline{v})$ lineáris függvények.

4. Egy bilineáris függvény antiszimmetrikus, ha minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$-re $\mathbf{A}(\underline{u}, \underline{v}) = -\mathbf{A}(\underline{v}, \underline{u})$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{A}$ akkor és csak akkor antiszimmetrikus, ha $\underline{x} \in V$-re $\mathbf{A}(\underline{x}, \underline{x}) = 0$.

5. Bizonyítsuk be, hogy minden bilineáris függvény felírható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus bilineáris függvény összegeként.

6. Legyen V a legfeljebb 4-odfokú valós együtthatós polinomok szokásos vektortere. Írjuk fel az alábbi szimmetrikus bilineáris függvények egy-egy diagonális mátrixát és adjunk is meg egy-egy $\mathbf{A}$-ortogonális bázist. Legyen f, g képe:

   (a) $f(1)g(1)$;

   (b) fg-ben x^2 együtthatója;