Bevezetés a számításelméletbe II.

8. gyakorlat 2002. április 11.

Katona Gyula

HF volt Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n + 1$ prím, akkor n kettőhatvány!

HF volt Mutassuk meg, hogy bármely $n, k, a > 1$ egészekre

$$d(a^n - 1, a^k - 1) = a^{d(n,k)} - 1$$

1. Döntsük el, hogy megoldhatóak-e az alábbi kongruenciák, és a megoldhatókat oldjuk meg:
   (a) a) $3x \equiv 5 \pmod 7$,
   (b) b) $14x \equiv 8 \pmod{21}$,
   (c) c) $11x \equiv 12 \pmod{18}$,
   (d) d) $9x \equiv 24 \pmod{96}$,
2. Néhány veréb röpköd egy fa körül. Ha minden ágra $1-1$ veréb ül, akkor n verébnek nem jut hely, ha viszont n ág üres marad, akkor a többi ágon $n-n$ veréb ül. Hány ág és hány veréb van?
3. Milyen maradékot ad 13-mal osztva 42^{600}?
4. Milyen maradékot ad 103-mal osztva $205^{206^{207}}$?
5. Bizonyítsuk be, hogy ha az n egész szám nem osztható 17-tel, akkor $n^8 - 1$ vagy $n^8 + 1$ osztható 17-tel!
6. Bizonyítsuk be, hogy $n^7 - n$ osztható 42-vel, ha n tetszőleges egész szám!
7. Bizonyítsuk be, hogy ha n tetszőleges egész szám, p tetszőleges prímszám, akkor $n^{p^p} - n$ osztható p-vel!
8. Milyen n-ekre teljesül $\varphi(7n) = 7\varphi(n)$?
9. Legyen $p > 2$ prím. Képezzünk egy egész számokból álló, $p-1$ tagú számtani sorozatot, és szorozzuk össze az elemeit. Milyen maradékot adhat ez a szorzat p-vel osztva?