Bevezetés a számításelméletbe

8. gyakorlat 2001. november 6.

Katona Gyula

1. Legyen V a legfeljebb 6-odfokú valós együtthatós polinomok szokásos vektortere. Határozzuk meg az alábbi lináris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait. Hány dimenziósak a megfelelő sajáalterek?
   (a) $f \mapsto f'$; mo: sé: 0, sv: konst.; dim=1
   (b) $f \mapsto xf'$; mo: sé: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$; sv: egytagúak, dim =mind 1
   (c) $f \mapsto f(6)x^6$; mo: sé:$0, 6^6$; sv: $(x-6)$-tal oszthatók. ill. γx^6; dim=6 ill. 1.
2. Legyen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ lineáris leképezés, α közös sajátértéke $\mathcal{A}$-nak és $\mathcal{B}$-nek. Következik-e ebből, hogy
   (a) $\mu\mathcal{A}$-nak, mo: $\mu\alpha$
   (b) $\mathcal{A}+\mathcal{B}$-nek, mo: nem
   (c) $\mathcal{A}^2$-nek, mo: α^2
   (d) $\mathcal{AB}$-nek illetve mo: nem
   (e) $\mathcal{A}^{-1}$-nek mo: α^{-1}

   van sajátértéke? Ha igen, hogy fejezhető ki α-val?
3. Legyen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ lineáris leképezés, $\underline{v}$ közös sajátvektora $\mathcal{A}$-nak és $\mathcal{B}$-nek. Következik-e ebből, hogy
   (a) $\mu\mathcal{A}$-nak, mo: $\mu\alpha$
   (b) $\mathcal{A}+\mathcal{B}$-nek, mo: nem
   (c) $\mathcal{A}^2$-nek, mo: α^2
   (d) $\mathcal{AB}$-nek illetve mo: nem
   (e) $\mathcal{A}^{-1}$-nek mo: α^{-1}

   van sajátvektora? Ha igen, milyen sajátérték tartozik hozzá?
4. Igaz-e, hogy ha $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{E}$, akkor $\mathcal{A}$-nak és $\mathcal{B}$-nek ugyanazok a sajátvektorai? mo: igaz, $Bu = Eu - Au = (1-\lambda)u$
5. Igaz-e, hogy ha $\mathcal{AB}=\mathcal{O}$, akkor $\mathcal{A}$-nak és $\mathcal{B}$-nek ugyanazok a sajátvektorai?
6. Legyenek $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ az $\mathcal{A}$ lin. transzformáció olyan sajátvektorai, amelyek közül bármely kettőhöz különböző sajátérték tartozik. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ lineárisan függetlenek!
7. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Írjuk fel az alábbi transzformációk karakterisztikus polinomját.
   (a) Tükrözés origón átmenő egyenesre mo: x^2-1
   (b) 90 fokos forgatás az origó körül mo: x^2+1
   (c) helybenhagyás mo: $(x-1)^2$
   (d) 5-szörös nagyítás az origóból mo: $(x-5)^2$
8. Legyen $\mathcal{A}$ karakterisztikus polinomja $f(x)$. Hogyan kajuk meg $\mu\mathcal{A}$ karakterisztikus polinomját? mo: $f(x) = (-1)^n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$; $g(x) = (-1)^n x^n + \mu\alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \mu^{n-1}\alpha_1 x + \mu^n \alpha_0$
9. Legyen $dim V = n$ és tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ transzformációnak n különböző sajáértéke van. Bizonyítsuk be, hogy a sajátértékek összege az $[\mathcal{A}]$ főátlóbeli elemeinek összege, a sajátértékek szorzata pedig $\det[\mathcal{A}]$.