Bevezetés a számításelméletbe II.

7. gyakorlat 2002. április 4.

Katona Gyula

HF volt Liliputban csak házasságközvetítőn keresztül köthetnek házasságot a párok és egy-egy házasságközvetítő évente legfeljebb m esküvőt szervezhet. Egy-egy törpe–fiú több törpe–lány között is választhat; és ha egy törpe-fiú több házasságközvetítővel is kapcsolatba lép, akkor mindegyiknek elmondja barátnői teljes listáját. Adjunk algoritmust, mely maximalizálja az egy évben szervezhető esküvőket.

HF volt Oldjuk meg az előző feladat Dél-liliputi változatát is (ahol még megengedett a többnejűség)?

HF volt Legyen $H_{2r,n}$ a következő gráf: Rajzoljunk le n pontot egy szabályos n-szög pontjaiként. Minden pontot kössünk össze a legközelebb levő $2r$ ponttal (mindkét irányban r ponttal). Bizonyítsuk be, hogy a $H_{2r,n}$ gráf $2r$-szeresen pontösszefüggő!

1. Ha b osztója a-nak, mik a lehetséges értékei a $d(a, a+b)$, és a $d(2a, a-b)$ legnagyobb közös osztóknak?
2. Legyen a és b páratlan. Mennyi $d(a^2+b^2, 4)$?
3. Vegyünk nyolc különböző természetes számot és képezzük a páronkénti különbségeik szorzatát. A 2-nek legalább hányadik hatványával osztható ez a szorzat?
4. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan 3 jegyű szám, melynek osztóinak száma osztható volna 11-gyel!
5. Bizonyítsuk be, hogy minden a, b egészre $d(ab) \le d(a)d(b)$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a és b relatív prímek!
6. Melyek azok a p prímszámok, amelyekre $p+10$ és $p+14$ is prímszám?
7. Bizonyítsuk be, hogy $d(n, k)$ alkalmas u, v egészekkel felírható $d(n, k) = un + vk$ alakban!
8. Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n - 1$ prím, akkor n prím!
9. Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n + 1$ prím, akkor n kettőhatvány!
10. Mutassuk meg, hogy bármely $n, k, a > 1$ egészekre

$$d(a^n - 1, a^k - 1) = a^{d(n,k)} - 1$$