Bevezetés a számításelméletbe II.

6. gyakorlat 2002. március 28.

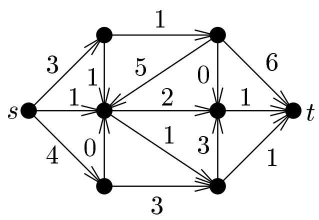
Katona Gyula

HF volt Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű, összefüggő gráfban nincs háromszög, akkor $|E(G)| \leq \alpha(G)\tau(G)$.

HF volt Adott a síkon n pont úgy, hogy semelyik 2 pont távolsága nem nagyobb 1-nél. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az olyan párok száma, melyek távolsága nagyobb mint $1/\sqrt{2}$, legfeljebb $\lfloor n^2/3 \rfloor$.

HF volt Legyen G egy páratlan kört tartalmazó gráf és legyen $t_G(n)$ a G-t nem tartalmazó n pontú gráfok maximális élszáma. Bizonyítsuk be, hogy $t_G(n) \geq \lfloor n^2/4 \rfloor$

1. Határozzuk meg a maximális folyam értékét az ábrán látható hálózati folyamokon és bizonyítsuk is be, hogy ez maximális!



2. Igaz-e, hogy ha minden él kapacitása páros szám, akkor van olyan maximális folyam, aminek minden élén a folyam értéke páros szám? Igaz-e ugyanez páratlan számokkal?

3. Legyenek egy gráf pontjai az n hosszúságú $0-1$ sorozatok. Vezessen egy irányított él a-ból b-be, ha a-ban kevesebb 1-es van, mint b-ben, és legyen egy ilyen él kapacitása az egyesek számának különbsége. Legyen F_n a maximális folyam értéke $s = (0, \ldots, 0)$ és $t = (1, \ldots, 1)$ között. Mennyi F_3? Mennyi általában F_n?

4. Liliputban csak házasságközvetítőn keresztül köthetnek házasságot a párok és egy-egy házasságközvetítő évente legfeljebb m esküvőt szervezhet. Egy-egy törpe–fiú több törpe–lány között is választhat; és ha egy törpe-fiú több házasságközvetítővel is kapcsolatba lép, akkor mindegyiknek elmondja barátnői teljes listáját. Adjunk algoritmust, mely maximalizálja az egy évben szervezhető esküvőket.

5. Oldjuk meg az előző feladat Dél-liliputi változatát is (ahol még megengedett a többnejűség)?

6. Legyen $k \leq n-1$. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n-pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $(n+k-2)/2$, akkor a gráf k-szorosan pontösszefüggő!

7. Legyen $H_{2r,n}$ a következő gráf: Rajzoljunk le n pontot egy szabályos n-szög pontjaiként. Minden pontot kössünk össze a legközelebb levő $2r$ ponttal (mindkét irányban r ponttal). Bizonyítsuk be, hogy a $H_{2r,n}$ gráf $2r$-szeresen pontösszefüggő!