Bevezetés a számításelméletbe

6. gyakorlat 2001. október 16.

Katona Gyula

1. Számítsuk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_1^2 & \cdots & \gamma_1^{n-1} \\ 1 & \gamma_2 & \gamma_2^2 & \cdots & \gamma_2^{n-1} \\ 1 & \gamma_3 & \gamma_3^2 & \cdots & \gamma_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \gamma_n & \gamma_n^2 & \cdots & \gamma_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

mo:

$$\prod_{\forall i<j} (\gamma_i - \gamma_j)$$

2. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} mo:2 \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} mo:3 \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix} mo:1$$

3. Tekintsünk egy 10×20-as mátrixot, amelynek rangja 5. Igaz-e, hogy mindenképpen van olyan elem, amelyet alkalmasan módosítva a mátrix rangja csökken? mo: nem

4. Tekintsünk egy 10×20-as mátrixot, amelynek rangja 5. Igaz-e, hogy mindenképpen van olyan elem, amelyet alkalmasan módosítva a mátrix rangja nő? mo: igaz

5. Számísuk ki az alábbi valós mátrixok inverzét:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, mo: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} mo: \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Határozzuk meg az alábbi $n \times n$-es valós mátrixok invert

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}, mo: \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, mo: \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix} mo: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0\cdots & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Adjunk példát olyan $k \times n$-es mátrixra, amelynek rangja $r \leq \min(k, n)$m és bármelyik r darab oszlop lineárisan független! mo: Vandermond utolsó pársora csupa 0

8. Igaz-e, hogy minden valós mátrix előáll olyan márixok összegeként, amelyeknek minden sora mértani sorozat? mo: igaz, x_i-szer Vandermondok összege, lineáris egyetletrendszer, megolható