Bevezetés a számításelméletbe

5. gyakorlat 2001. október 9.

Katona Gyula

volt HF Legyen $V_1 \neq V_2$ és $A : V_1 \mapsto V_2$ lin. leképezés. Bizonyítsuk be, hogy van olyan bázispár, melynek mátrixában a főátlóban csupa 0 vagy 1 áll, máshol 0.

volt HF Legyen A egy 5×5-ös valós mátrix és tegyük fel, hogy $A^{2001} = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A^5 = 0$.

1. Mely vektortereknek van olyan lineáris transzformációja, amelynél a képtér és a magtér megegyezik?

2. Legyenek $A : V_1 \to V_2$ és $B : V_2 \to V_1$ lineáris leképezések. Melyikből következik, hogy V_1 és V_2 izomorf?

   (a) $\text{Im } A = V_2$ és $\text{Im } B = V_1$

   (b) $\text{Ker } A = \underline{0}$ és $\text{Ker } B = \underline{0}$

   (c) $\text{Im } A = V_2$ és $\text{Ker } B = \underline{0}$

3. Tegyük fel, hogy az $A, B : V_1 \to V_2$ lineáris leképezésekre $\text{Ker } A \subseteq \text{Ker } B$ és $\text{Im } A \subseteq \text{Im } B$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\text{Ker } A = \text{Ker } B$ és $\text{Im } A = \text{Im } B$.

4. Mely n-ekre létezik az $1, 2, \ldots, n$ számoknak olyan permutációja, amelyben minden elem pontosan

   (a) 1;

   (b) 2;

   (c) k

   másik elemmel áll inverzióban?

5. Egy $n \times n$-es valós elemű mátrixban tetszőleges számú elemet megváltoztathatunk. Legkevesebb hány elem módosítással érhetjük el, hogy a kapott márix determinánsa 0 legyen?

6. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1849 & 1444 & 1896 & 1222 \\ 1490 & 1703 & 1790 & 1526 \\ 1342 & 1566 & 1541 & 1514 \\ 1242 & 1552 & 1382 & 1825 \end{vmatrix} \neq 0.$$

7. Számítsiuk ki az alábbi $n \times n$-es márixok determinánsát.

   (a) $\alpha_{ij} = \begin{cases} i, & \text{ha } i = j; \\ 1, & \text{ha } i \neq j; \end{cases}$

   (b) $\alpha_{ij} = \min\{i, j\}$

   (c) $\alpha_{ij} = ij$

   (d) $\alpha_{ij} = i + j$

   (e) $\alpha_{ij} = i^2 + j^2$

   (f) $\alpha_{ij} = \begin{cases} \gamma, & \text{ha } i = j; \\ \delta, & \text{ha } i \neq j; \end{cases}$

   (g) $\alpha_{ij} = ij$ legkisebb pozitív maradéka modulo n