Bevezetés a számításelméletbe

4. gyakorlat 2001. október 2.

Katona Gyula

1. Legyen $V = V_1 = V_2$ a valós test feletti legfeljebb 100-adfokú polinomok vektortere: $\alpha_{100}x^{100} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Lineáris leképezések-e ezek, mi a magtere, képtere, ezek dimenziója?
   (a) $f \mapsto f'$
   (b) $f(x) \mapsto f(x) - xf'(x)$
   (c) $f \mapsto \alpha_0 x$
   (d) $f \mapsto \alpha_n x^2$, ahol α_n az f főegyütthatója.
2. Bizonyítsuk be, hogy a racinális számok teste feletti vektorterek esetében egy összegtartó lineáris leképezés szükségképpen lineáris.
3. Tegyük fel, hogy A egy lin. leképezés $V_1 \mapsto V_2$ és $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k \in V_1$ olyan lin. független vektorok, amelyekre $A\underline{u}_1 = \cdots = A\underline{u}_k$. Bizonyítsuk be, hogy $\dim \mathrm{Ker} A \geq k - 1$.
4. Legyen W a V véges dimenziós vektortér egy nemtriv. altere. Bizonyítsuk be, hogy V-nek létezik olyan lineáris leképezése önmagára, amelynek W a megtere, ill. képtere.
5. Igaz-e, hogy ha két mátrix szorzata a csupa 0 márix, akkor az egyik mátrix is ilyen?
6. Legyen V a legfeljebb 6-od fokú polinomok vektortere és legyen A a deriválás, mint lineáris leképezés. Írjuk fel ennek mátrixát.
7. Legyen $V = \mathbb{C}^3$ és legyen $A, B : V \mapsto V$:
$$A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\\ \alpha_3\end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_3\\ \alpha_2\end{pmatrix}$$
   Adjuk meg az $AB, BA, (AB)^{101}$ transzformációkat.
8. Legyen $V_1 \neq V_2$ és $A : V_1 \mapsto V_2$ lin. leképezés. Bizonyítsuk be, hogy van olyan bázispár, melynek mátrixában a főátlóban csupa 0 vagy 1 áll, máshol 0.
9. Számítsuk ki:
   (a) $\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -2\end{pmatrix}^{1111}$
   (b) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{n}$
   (c) $\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}^{n}$
10. Legyen A egy 5×5-ös valós mátrix és tegyük fel, hogy $A^{2001} = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A^5 = 0$.