Bevezetés a számításelméletbe II.

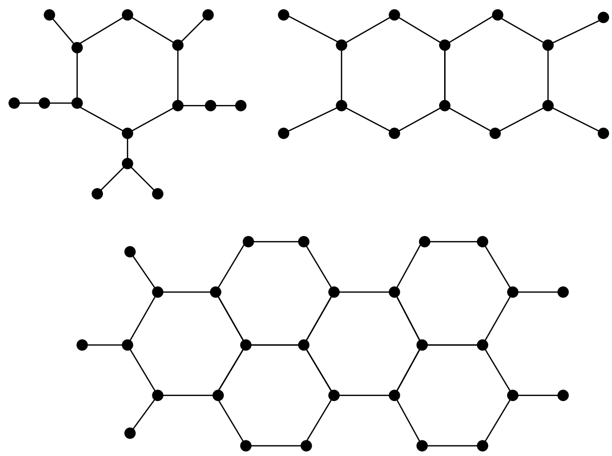
3. gyakorlat 2002. február 28.

Katona Gyula

HF volt: Bizonyítsuk be, hogy minden e élű gráfnak van olyan páros részgráfja, ami legalább $e/2$ élet tartalmaz!

HF volt: Ketten a következő játékot játszák egy G gráfon. Felváltva kiválasztanak $v_1, v_2, \ldots$ pontokat úgy, hogy ezek egy utat alkossanak. Aki nem tud már új pontot választani, veszít. Bizonyítsuk be. hogy a kezdőnek van nyerő stratégiája, ha G-ben nincs teljes párosítás.

1. Határozzuk meg a független élek maximális számát az ábra gráfjain! Bizonyítsuk be, hogy nem lehet többet találni!



2. Legyen $\Delta(G)$ egy gráfban a maximális fokszám, $tau(G)$ pedig a lefogó pontok minimális száma. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G)\tau(G) \geq |E(G)|$.
3. Legyen $V(G) = \{v_1, \ldots, v_{106}\}$. v_i és v_j között akkor és csak akkor van él, ha $|i-j| \leq 7$. Mennyi G kromatikus száma, $\chi(G)$?
4. Bizonyítsuk be, hogy minden gráfban $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$! Adjunk olyan gráfot, amelyre $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$!
5. Hagyjuk el egy $2n$ pontú teljes gráfból egy Hamilton–körének éleit! Mennyi a keletkező gráf kromatikus száma? És ha egy $2n+1$ pontú gráfból indulunk ki?
6. Bizonyítsuk be, hogy minden n pontú gráfra $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$!
7. Legyen egy összefüggő gráfban a maximális fokszám k. Bizonyítsuk be a Brooks tétel használata nélkül, hogy ha létezik k-nál kisebb fokú csúcs, akkor a gráf színezhető k színnel.
8. Legyenek a G gráf fokszámai rendre $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots d_n$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\chi(G)^2 \leq 1 + d_1 + d_1 + 3d_2 + 4d_5 + 5d_9 + 6d_{14} + 7d_{20} + \ldots$$