Bevezetés a számításelméletbe

3. gyakorlat 2001. szeptember 24.-25.

Katona Gyula

1. Számítsd ki az
$$x-2=-\frac{y+3}{2}=z-4 \text{ és } x+1=\frac{y+7}{3}=-z+5$$
egyenesek metszéspontját!

2. Számítsd ki a $P(2,1,1)$ pont $x+y-z+1=0$ síktól való távolságát!

3. Oldjuk meg a következő egyenletet.
$$\frac{x-1974}{27}+\frac{x-1976}{25}+\frac{x-1978}{23}+\frac{x-1980}{21}=\frac{x-27}{1974}+\frac{x-25}{1976}+\frac{x-23}{1978}+\frac{x-21}{1980}$$

4. Határozzuk meg a $(2,0,0)$, $(0,-1,0)$, $(0,0,5)$ pontokra fektetett sík egyenletét.

5. A z mely értékei mellett merőleges az $(5,-3,2)$ és a $(7,4,z)$ vektor egymásra?

6. Döntsük el, hogy a valós együtthatós polinomok alábbi részhalmazai vektorteret alkotnak-e a szokásos műveletekkel.
   (a) $\{f \mid \deg f = 100 \text{ vagy } f=0\}$
   (b) $\{f \mid \deg f \le 100 \text{ vagy } f=0\}$
   (c) $\{f \mid x^3+1\text{-gyel osztva } f \text{ konstans maradékot ad}\}$

7. Legyen V a komplex számok halmaza, T pedig a racionális számok teste, és definiáljuk az $\oplus$ összeadást és a $\odot$ skalárral való szorzást a következőképp:
$$u\oplus v=u+v+1, \quad \lambda\odot v=\lambda v+\lambda-1.$$
Vektorteret kapunk-e így?

8. Legyen W altere V-nek, $u,v,w\in V$ és tegyük fel, hogy $u+v\in W$, $v+2w\notin W$, $w+3u\in W$. Mit mondtahunk az $5u+3v+w$, illetve $6u+3v+w$ vektorok és W kapcsolatáról?

9. Bizonyítsuk be, hogy ha a V vektortérben az $\langle \underline{a}_1,\underline{a}_2,\dots,\underline{a}_k\rangle$ egy lineárisan független rendszer, és a $\langle \underline{b}_1,\underline{b}_2,\dots,\underline{b}_{k+1}\rangle$ pedig egy generátorrendszer, akkor s kettő közül pontosan az egyik bázis!

10. Mennyi az alábbi vektorterek dimenziója?
    (a) A komplex számok a valós számok felett?
    (b) A szimmetrikus $n\times n$ mártixok?
    (c) egy k egyenletet, n ismeretlent tartalmazó homogén lineáris egyelnetrendszer megoldásai, ahol az együtthatómátrix rangja r?