Bevezetés a számításelméletbe II.

2. gyakorlat 2002. február 21.

Katona Gyula

HF volt Fel lehet-e sorolni egy kör mentén 2^k darab 0-t ill. 1-est, hogy minden k hosszú $0-1$ sorozat pontosan egyszer álljon elő ívként?

HF volt Konstruáljunk $k \geq 3$-ra k-reguláris, összefüggő, egyszerű, páros gráfot, amelyben nincs Hamilton-kör!

1. Legyen G egy egyszerű, összefüggő, páros gráf, amelynek mindkét pontosztályában n pont van. Az egyik osztályban minden pont foka különböző. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van teljes párosítás!
2. Mutasd meg, hogy r-reguláris páros gráfnak mindig van teljes párosítása. (A G gráf r-reguláris, ha minden pont foka r.)
3. Egy páros gráf minden csúcsába pontosan r él fut. Véletlenül éppen r darab különböző színű ceruzánk van (a feketén kívül, amivel az eredeti ábra készült). Bizonyítsuk be, hogy az élek kihúzhatók színessel úgy, hogy minden csúcsba csupa különböző színű menjen!
4. Legyen a G egyszerű, páros gráfban a maximális fokszám k. Bizonyítsuk be, hogy van olyan párosítás G-ben, amely lefedi az összes k fokú pontot!
5. Bizonyítsuk be, hogy minden e élű gráfnak van olyan páros részgráfja, ami legalább $e/2$ élet tartalmaz!
6. Tegyük fel, hogy a $G = (A, B; E)$ páros gráfban minden $X \subseteq A$-ra teljesül, hogy $|N(X)| \geq |X| + 1$. Bizonyítsuk be, hogy minden e élhez van olyan A-t lefedő párosítás, ami tartalmazza e-t.
7. Ketten a következő játékot játszák egy G gráfon. Felváltva kiválasztanak $v_1, v_2, \ldots$ pontokat úgy, hogy ezek egy utat alkossanak. Aki nem tud már új pontot választani, veszít. Bizonyítsuk be. hogy a kezdőnek van nyerő stratégiája, ha G-ben nincs teljes párosítás és a másodiknak, ha G-ben van teljes párosítás.
8. Bizonyítsuk be, hogy $2n$ ill. $2n-1$ csapat is le tud játszani egy körmérkőzéses bajnokságot ($\forall$ki $\forall$kivel egyszer játszik) $2n-1$ fordulóban!