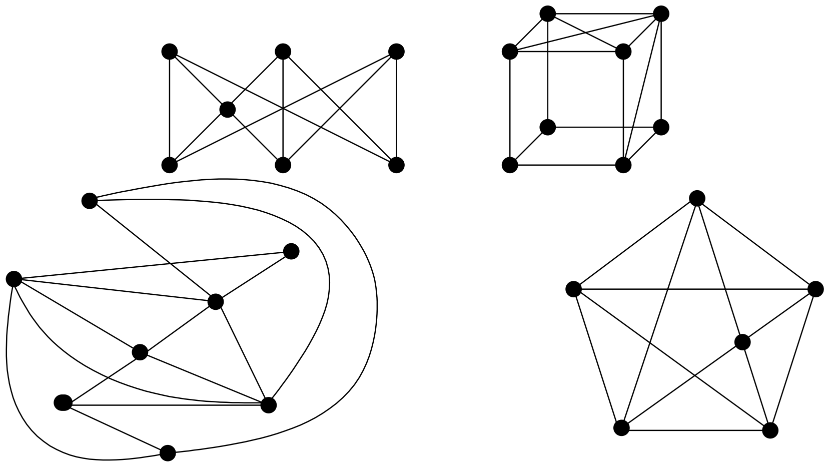
Bevezetés a számításelméletbe

12. gyakorlat 2001. december 4.

Katona Gyula

1. Síkbarajzolhatóak-e az ábrán látható gráfok? (Csak a karikák a gráf pontjai!)



2. A G_n gráf pontjai az $1, 2, \ldots, n$ számok és kétpont akkor és csak akkor van összekötve, ha a megfelelő számok közül az egyik osztja a másikat. Mutassuk meg, hogy $n \geq 16$ esetén G_n nem síkbarajzolható! ($n = 15$-re sem, csak $n \leq 14$-re.)

3. Egy hatelemű halmaz kételemű részhalmazai legyenek egy gráf pontjai. Két pont akkor legyen összekötve egy éllel, ha a nekik megfelelő részhalmazok diszjunktak (metszetük üres). Síkbarajzolható-e ez a gráf?

4. Az n-pontú, e élű, síkbarajzolható gráf bármely 5 élét kiválasztva létezik G-nek olyan feszítőfája, amely mind az 5 élet tartalmazza. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $e \leq \frac{3}{2}n - 3$!

5. Bizonyítsuk be, hogy egy 4–reguláris, egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható!

6. Bizonyítsuk be, hogy ha a K_8-at akarjuk síka lerajzolni, akkor legalább 10 élkeresztezés jön létre!

7. Legyen G egy 3-reguláris, síkbarajzolható gráf, amelyben minden csúcshoz egy 4 oldalú, egy 6 oldalú és egy 8 oldalú tartomány csatlakozik. Hány tartománya van G-nek?

8. Egy gráf *outerplanar* ha lerajzolható a síkba úgy, hogy minden pontja a végtelen tartomány határán legyen. Bizonyítsuk be, hogy G akkor és csak akkor outerpalanr, ha nincsen benne K_4-gyel és $K_{2,3}$-mal topológikusan izomorf részgráf!

9. Mutassuk meg, hogy a két Kuratowski-gráf felrajzolható a tóruszra! (Tórusz pl. az úszógumi felülete.)