Bevezetés a számításelméletbe

10. gyakorlat 2001. november 20.

Katona Gyula

1. Mi a következő halmazok számossága?
   (a) A természetes számok véges részhalmazai.
   (b) A természetes számok részhalmazai.
   (c) Azok az $1, a_1, a_2, \ldots$ sorozatok, melyekben a szomszédos elemek hányadosa $1/2$ vagy 2.
   (d) Azon síkbeli háromszögek, melyeknek minden koordinátája egész szám.
   (e) Azon síkbeli háromszögek, melyeknek a területe egész szám.
   (f) A síkon egy háromszög belső pontjai.
   (g) A racionális számokból álló végtelen sorozatok.
   (h) Páronként diszjunkt nem elfajuló intervallumok maximális számossága a számegyenesen.
   (i) A természetes számok összes permutációja (azon sorozatok, melyekben minden elem csak egyszer fordul elő).
   (j) A folytonos valós függvények.

2. A sík felett sűrű köd gomolyog. A gonosz ellenség a síkbeli koordinátarendszer origójából indulva menekül egyenes vonalú egyenletes mozgással, minden másodperc végén rácspontban van. Mi meg akarjuk semmisíteni az ellenséget, ezést minden másodperc végén ledobhatunk egy bombát a sík tetszőleges pontjára. Ha a gonosz éppen ott van, nyertünk. Legyőzhetjük-e az ellenséget, ha teszőleges sok idő áll rendelkezésre? Mi a helyzet, ha nem tudjuk, hogy az ellenség az origóból indul?

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges (valósról valósra képező) függvény lokális maximumértékeinek halamza megszámlálható!

4. Bizonyítsuk be, hogy a megadható a természetes számoknak continuum számosságú részhalmaza úgy, hogy bármely kettő metszete véges legyen!