

Algoritmuselmélet 16. előadás

Katona Gyula Y.
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi Tsz.
I. B. 137/b
kiskat@cs.bme.hu

2002 Április 29.

Konjunktív normálforma

Konjunktív normál forma:

$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee x_4 \vee \bar{x}_7 \vee \bar{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \bar{x}_{10} \vee \bar{x}_{13}) \wedge \dots$$

Tétel. Minden Boole-formulának létezik konjunktív normál formája.

k -konjunktív normál forma: ha $\phi = \phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n$, akkor minden ϕ_i -ben legfeljebb k literál szerepel. Pl.: 4-CNF:

$$(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_4 \vee \bar{x}_7 \vee \bar{x}_{18}) \wedge (x_9 \vee \bar{x}_{10} \vee \bar{x}_{13}).$$

Definíció. Jelölje k -SAT a kielégíthető k -CNF-ekből álló nyelvet.

k -SAT \in NP \iff tanú egy kielégítés

Tétel. 2-SAT \in P.

Tétel. 3-SAT NP-teljes.

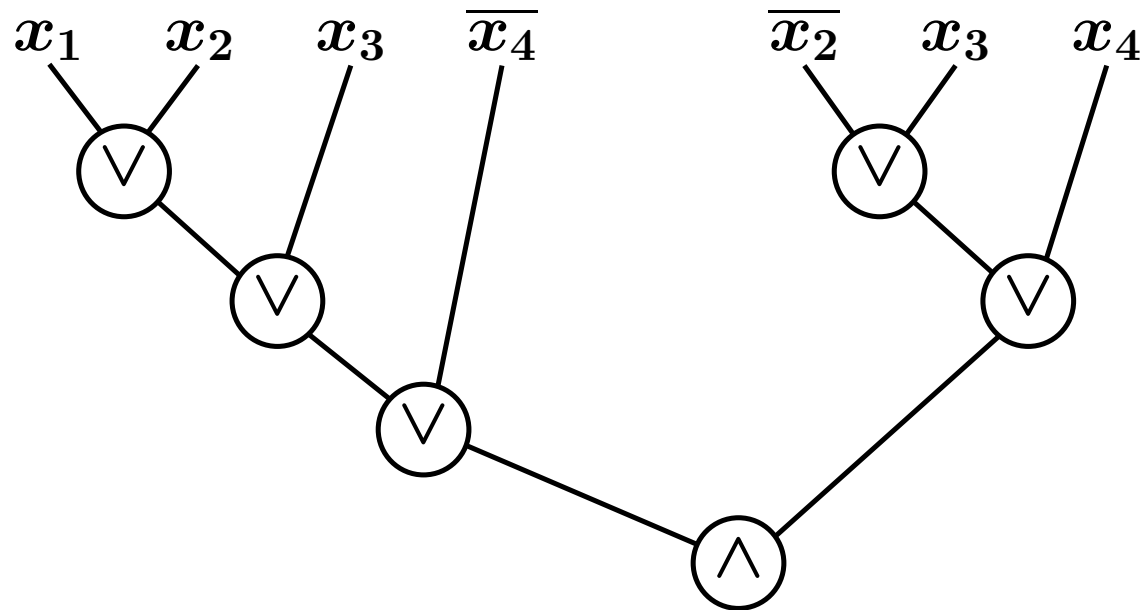
Tétel. 3-SAT NP-teljes.

Bizonyítás: Belátjuk, hogy $\text{SAT} \prec 3\text{-SAT}$.

Tetszőleges ϕ formulához kell adni egy ψ -t ami 3-CNF, ekvivalens ϕ -vel és polinom időben számolható.

Kifejezésfa:

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)$$



A kifejezésfa minden csúcsához rendeljünk egy új változót: z_i és egy ϕ_i Boole-formulát, ami megadja z_i értékét:

$$u \leftrightarrow v = (u \vee \bar{v}) \wedge (\bar{u} \vee v)$$

$$\begin{aligned} z_i = z_j \wedge z_k &= z_i \leftrightarrow (z_j \wedge z_k) = \\ &= (z_i \vee \overline{(z_j \wedge z_k)}) \wedge (\bar{z}_i \vee (z_j \wedge z_k)) = \\ &= (z_i \vee \bar{z}_j \vee \bar{z}_k) \wedge (\bar{z}_i \vee z_j) \wedge (\bar{z}_i \vee z_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_i = z_j \vee z_k &= z_i \leftrightarrow (z_j \vee z_k) = \\ &= (z_i \vee \overline{(z_j \vee z_k)}) \wedge (\bar{z}_i \vee (z_j \vee z_k)) = \\ &= (z_i \vee \bar{z}_j) \wedge (z_i \vee \bar{z}_k) \wedge (\bar{z}_i \vee z_j \vee z_k) \end{aligned}$$

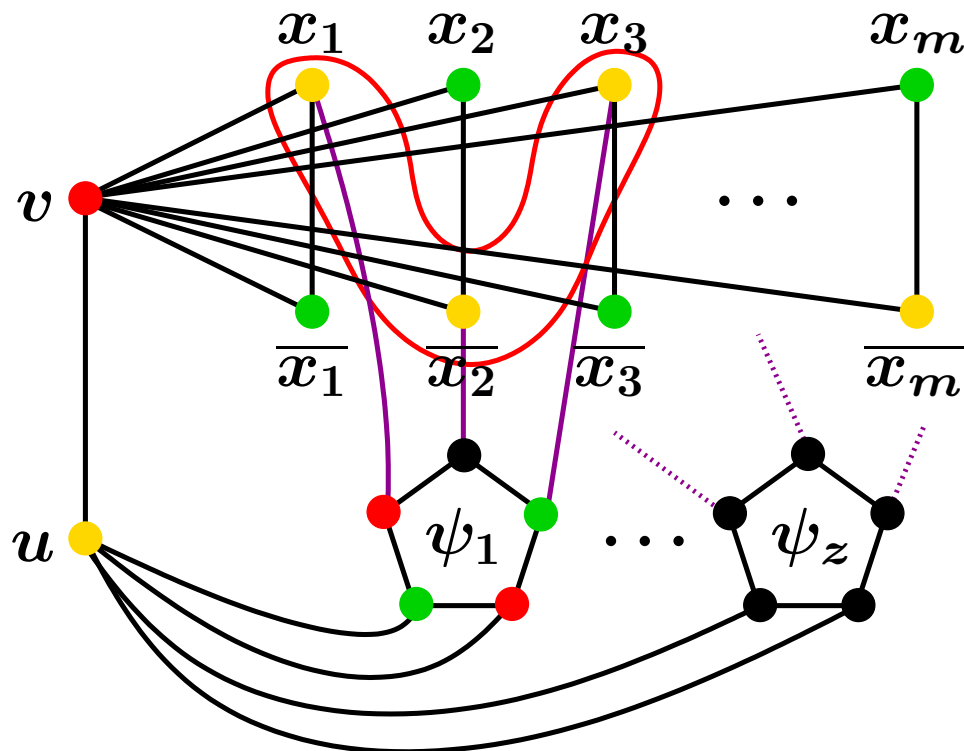
$$\psi = (\wedge \phi_i) \wedge z_m$$

Ez ekvivalens ϕ -vel, és polinom időben számolható. ✓

3-SZÍN

Tétel. A 3-SZÍN nyelv NP-teljes.

Bizonyítás: Már láttuk, hogy \in NP, belátjuk, hogy $3\text{-SAT} \leq 3\text{-SZÍN}$.
Tetszőleges ψ 3-CNF-hez építenünk kell egy G gráfot úgy, hogy $\psi \in 3\text{-SAT}$ pont akkor igaz, ha $G \in 3\text{-SZÍN}$.



Zöld igen \implies minden ψ_i -ben van zöld.

Maximális méretű független pontrendszer gráfokban

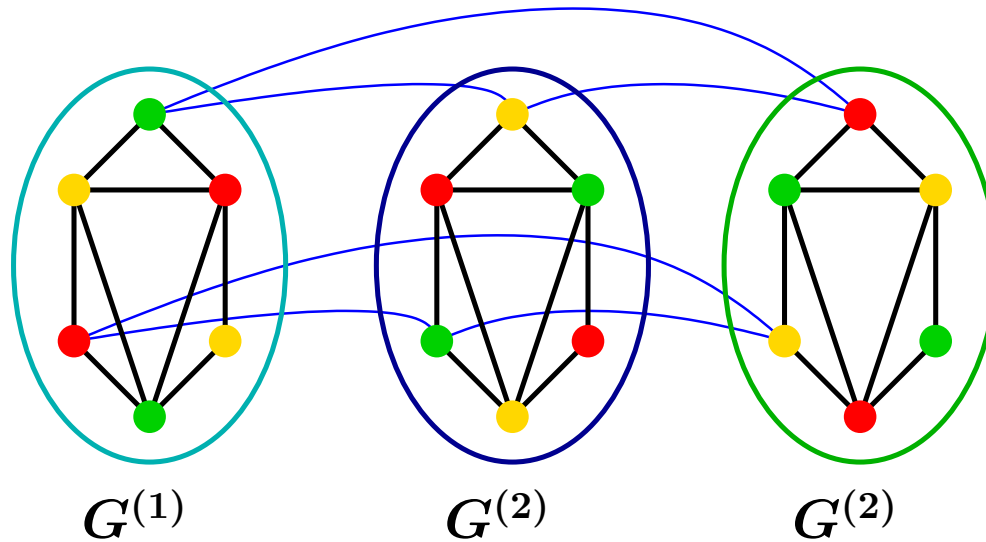
$$\text{MAXFTLEN} = \left\{ (G, k) \mid \begin{array}{l} G \text{ egy gráf, } k \in \mathbb{Z}^+, \text{ és} \\ G\text{-nek van } k \text{ elemű független csúcshalmaza} \end{array} \right\}.$$

Tétel. A *MAXFTLEN* nyelv NP-teljes.

Bizonyítás: *MAXFTLEN* \in NP: tanú egy k -elemű $S \subseteq V(G)$ független csúcshalmaz. ✓

Megadunk egy 3-SZÍN \prec *MAXFTLEN* Karp-redukciót, $G \rightarrow G_1$

$G \in$ 3-SZÍN pontosan akkor, ha $(G_1, k) \in$ *MAXFTLEN*. (*)



$$|V(G_1)| = 3|V(G)| \text{ és } |E(G_1)| = 3|V(G)| + 3|E(G)|,$$

$$\text{legyen } k = |V(G)|.$$

Ha G színezhető 3 színnel \implies legyen H a piros pontok halmaza G_1 -ben.

✓

Ha G_1 -ben van $|V(G)|$ független \implies legyen egy pont színe olyan, hogy melyik $G^{(i)}$ -ben van. ✓

$\text{MAXKLIKK} = \{(G, k) \mid G\text{-ben van } k \text{ pontú teljes részgráf}\}.$

Tétel. A MAXKLIKK nyelv NP-teljes.

Bizonyítás: $G \leftrightarrow \overline{G}$ ✓

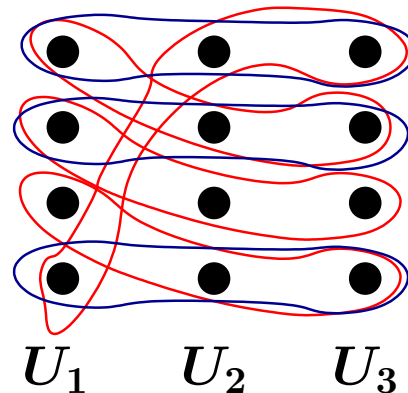
A 3 dimenziós házasság

Párosítási feladat általánosítása: Legyenek U_1, U_2, U_3 azonos méretű véges halmazok $\implies |U_i| = t$.

Adott még $U_1 \times U_2 \times U_3$ valamely S részhalmaza $\implies (u_1, u_2, u_3)$ alakú hármások

Kiválasztható-e S -ből egy **3 dimenziós házasság**?

\implies olyan t -elemű $S' \subseteq S$ részhalmaz, mely minden U_i -beli pontot lefed.



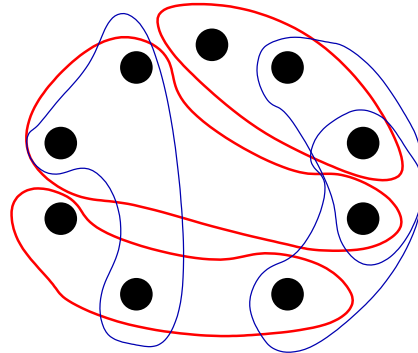
3-DH: olyan U_1, U_2, U_3 ; $S \subseteq U_1 \times U_2 \times U_3$ rendszerek, melyeknél S -ből kiválasztható egy 3 dimenziós házasság.

Tétel. A 3-DH feladat NP-teljes.

Bizonyítás: 3-DH \in NP $\checkmark \exists$ 3-SAT \prec 3-DH

X3C

Pontos fedés hármassokkal: adott egy U véges halmaz, és U háromelemű részalmazainak egy $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ családja. Eldöntendő, hogy az \mathcal{F} -ből kiválaszthatók-e páronként diszjunkt halmazok, melyek együttesen lefedik U -t. Jelölje X3C azokat az (U, \mathcal{F}) párokat, melyekre igen.



Tétel. Az X3C nyelv NP-teljes.

Bizonyítás: X3C \in NP teljesül \implies tanú egy pontos fedés.

Megmutatjuk, hogy 3-DH \prec X3C.

X3C általánosabb probléma, mint 3-DH. Ha van algoritmus az általánosra, akkor avval a speciális is megoldható. ✓

Ha L NP-teljes és L' általánosítása L -nek, akkor L' is NP-teljes.

Utazó ügynök probléma

Tétel. Az IH nyelv NP-teljes.

Tétel. Az H nyelv NP-teljes.

Bizonyítás: Már láttuk, hogy $H \in NP$ ✓
és láttuk, hogy $IH \prec H$ ✓

Utazó ügynök feladat:

Adott egy G irányítatlan gráf pozitív egészekkel súlyozott élekkel.

A cél minél rövidebb összsúlyú Hamilton-kört találni G -ben.

$\implies Ut$ nyelv \implies olyan (G, k) párokból áll, melyekben G egy súlyozott élű irányítatlan gráf, k egy nemnegatív egész, és G -ben van k -nál nem nagyobb súlyú Hamilton-kör.

Tétel. Az Ut nyelv NP-teljes.

Bizonyítás: H általánosítása \iff minden él súlya 1 és $k = |V(G)|$ ✓

A Hátizsák feladat

Hátizsák feladat:

adottak az $s_1, \dots, s_m > 0$ súlyok, ezek $v_1, \dots, v_m > 0$ értékei, valamint a b megengedett maximális összsúly.

Tegyük fel, hogy az s_i, v_i, b számok egészek.

A feladat az, hogy találjunk egy olyan $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ részhalmazt, melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$, és ugyanakkor $\sum_{i \in I} v_i$ a lehető legnagyobb.

\implies Input: $s_1, \dots, s_m; v_1, \dots, v_m; b; k$

$Hát = \{(s_1, s_2, \dots, s_m; v_1, v_2, \dots, v_m; b; k) \mid s_i, b, k > 0 \text{ egészek, és}$

van olyan $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$ és $\sum_{i \in I} v_i \geq k\}$.

Vegyük azt a speciális esetet, amikor $s_i = v_i$ és $b = k$:

Részhalmazösszeg probléma:

$RH = \left\{ (s_1, \dots, s_m; b) \mid \begin{array}{l} s_i, b > 0 \text{ egészek,} \\ \text{és van olyan } I \subseteq \{1, \dots, m\} \text{ hogy } \sum_{i \in I} s_i = b \end{array} \right\}$.

Tétel. Az RH nyelv NP-teljes.

Bizonyítás: $RH \in NP$ ✓

$X3C \prec RH$

Speciális eset \implies

Partíció feladat: ahol a $b = \frac{1}{2} \sum s_i$

Partíció = $\left\{ (s_1, \dots, s_m) \mid \begin{array}{l} s_i > 0 \text{ egészek, és van olyan} \\ I \subseteq \{1, \dots, m\}, \text{ hogy } \sum_{i \in I} s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m s_i \end{array} \right\}$.

Tétel. A Partíció nyelv NP-teljes.

Bizonyítás: Partíció $\in NP$ ✓

Belátjuk, hogy $RH \prec \text{Partíció}$ **RH általánosabb!**

Vegyük az RH egy $x = (s_1, \dots, s_m; b)$ inputját.

\implies Feltehető, hogy $b \leq s = \sum_{i=1}^m s_i$.

$x \rightarrow$ Partíció inputját: $(s_1, \dots, s_m, s + 1 - b, b + 1)$.

A számok összege $2s + 2$, az utolsó két szám nem lehet egy partíció ugyanazon osztályában, mert az összegük túl nagy: $s + 2 > \frac{1}{2}(2s + 2)$.