Algoritmuselmélet 14. előadás

Katona Gyula Y.
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi Tsz.
I. B. 137/b
kiskat@cs.bme.hu

2002 Április 22.

Idő- és tárkorlátok

Definíció. *Legyen* $t : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ *egy függvény, melyre minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *esetén* $t(n) \geq n$ *teljesül. Az* M *Turing-gép* $t(n)$ időkorlátos*, ha* n *hosszú inputokon legfeljebb* $t(n)$ *lépést tesz (más szóval* $T_M(n) \leq t(n)$*).*

Idő- és tárkorlátok

Definíció. *Legyen* $t : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ *egy függvény, melyre minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *esetén* $t(n) \geq n$ *teljesül. Az* M *Turing-gép* $t(n)$ időkorlátos*, ha* n *hosszú inputokon legfeljebb* $t(n)$ *lépést tesz (más szóval* $T_M(n) \leq t(n)$*).*

$t(n) \geq n \implies$ a gép legalább végigolvashatja az inputot

Idő- és tárkorlátok

Definíció. *Legyen* $t : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ *egy függvény, melyre minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *esetén* $t(n) \geq n$ *teljesül. Az* M *Turing-gép* $t(n)$ időkorlátos*, ha* n *hosszú inputokon legfeljebb* $t(n)$ *lépést tesz (más szóval* $T_M(n) \leq t(n)$*).*

$t(n) \geq n \implies$ a gép legalább végigolvashatja az inputot
M gyors $\implies t(n)$ lassan növekedő függvény

Idő- és tárkorlátok

Definíció. *Legyen* $t : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ *egy függvény, melyre minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *esetén* $t(n) \geq n$ *teljesül. Az* M *Turing-gép* $t(n)$ időkorlátos*, ha* n *hosszú inputokon legfeljebb* $t(n)$ *lépést tesz (más szóval* $T_M(n) \leq t(n)$*).*

$t(n) \geq n \implies$ a gép legalább végigolvashatja az inputot
M gyors $\implies t(n)$ lassan növekedő függvény

Példa: hárommal való oszthatóságot ellenőrző Turing-gép $\implies n + 1$ időkorlátos

Idő- és tárkorlátok

Definíció. *Legyen $t : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ egy függvény, melyre minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $t(n) \geq n$ teljesül. Az M Turing-gép $t(n)$ időkorlátos, ha n hosszú inputokon legfeljebb $t(n)$ lépést tesz (más szóval $T_M(n) \leq t(n)$).*

$t(n) \geq n \implies$ a gép legalább végigolvashatja az inputot
M gyors $\implies t(n)$ lassan növekedő függvény

Példa: hárommal való oszthatóságot ellenőrző Turing-gép $\implies n+1$ időkorlátos

Definíció.

$$TIME(t(n)) := \left\{ L \subseteq I^* \;\middle|\; \begin{array}{l} L \text{ felismerhető egy } O(t(n)) \text{ időkorlátos} \\ M \text{ Turing-géppel} \end{array} \right\}.$$

Idő- és tárkorlátok

Definíció. *Legyen* $t : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *egy függvény, melyre minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *esetén* $t(n) \geq n$ *teljesül. Az* M *Turing-gép* $t(n)$ időkorlátos, *ha* n *hosszú inputokon legfeljebb* $t(n)$ *lépést tesz (más szóval* $T_M(n) \leq t(n)$*).*

$t(n) \geq n \implies$ a gép legalább végigolvashatja az inputot
M gyors $\implies t(n)$ lassan növekedő függvény

Példa: hárommal való oszthatóságot ellenőrző Turing-gép $\implies n+1$ időkorlátos

Definíció.

$$TIME(t(n)) := \left\{ L \subseteq I^* \;\middle|\; \begin{array}{l} L \text{ felismerhető egy } O(t(n)) \text{ időkorlátos} \\ M \text{ Turing-géppel} \end{array} \right\}.$$

$TIME(t(n)) \implies$ létezik $ct(n)$ időkorlátos TG

Idő- és tárkorlátok

Definíció. *Legyen* $t : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *egy függvény, melyre minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *esetén* $t(n) \geq n$ *teljesül. Az* M *Turing-gép* $t(n)$ időkorlátos, *ha* n *hosszú inputokon legfeljebb* $t(n)$ *lépést tesz (más szóval* $T_M(n) \leq t(n)$*).*

$t(n) \geq n \implies$ a gép legalább végigolvashatja az inputot
M gyors $\implies t(n)$ lassan növekedő függvény

Példa: hárommal való oszthatóságot ellenőrző Turing-gép $\implies n+1$ időkorlátos

Definíció.

$$TIME(t(n)) := \left\{ L \subseteq I^* \;\middle|\; \begin{array}{l} L \text{ felismerhető egy } O(t(n)) \text{ időkorlátos} \\ M \text{ Turing-géppel} \end{array} \right\}.$$

$TIME(t(n)) \implies$ létezik $ct(n)$ időkorlátos TG
n hosszú x inputokon a számítás *mindig befejeződik* legfeljebb $ct(n)$ lépésben, tekintet nélkül arra, hogy $x \in L$ igaz-e

Idő- és tárkorlátok

Definíció. *Legyen $t : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ egy függvény, melyre minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $t(n) \geq n$ teljesül. Az M Turing-gép $t(n)$ időkorlátos, ha n hosszú inputokon legfeljebb $t(n)$ lépést tesz (más szóval $T_M(n) \leq t(n)$).*

$t(n) \geq n \implies$ a gép legalább végigolvashatja az inputot
M gyors $\implies t(n)$ lassan növekedő függvény

Példa: hárommal való oszthatóságot ellenőrző Turing-gép $\implies n+1$ időkorlátos

Definíció.

$$TIME(t(n)) := \left\{ L \subseteq I^* \;\middle|\; \begin{array}{l} L \text{ felismerhető egy } O(t(n)) \text{ időkorlátos} \\ M \text{ Turing-géppel} \end{array} \right\}.$$

$TIME(t(n)) \implies$ létezik $ct(n)$ időkorlátos TG
n hosszú x inputokon a számítás *mindig befejeződik* legfeljebb $ct(n)$ lépésben, tekintet nélkül arra, hogy $x \in L$ igaz-e
$\implies TIME(t(n)) \subset \mathcal{R}$

Példa: $TIME(n) = \{$az $O(n),$ azaz lineáris időben felismerhető nyelvek$\}$.

Idő- és tárkorlátok

Definíció. *Legyen* $t : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *egy függvény, melyre minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *esetén* $t(n) \geq n$ *teljesül. Az* M *Turing-gép* $t(n)$ időkorlátos, *ha* n *hosszú inputokon legfeljebb* $t(n)$ *lépést tesz (más szóval* $T_M(n) \leq t(n)$*).*

$t(n) \geq n \implies$ a gép legalább végigolvashatja az inputot
M gyors $\implies t(n)$ lassan növekedő függvény

Példa: hárommal való oszthatóságot ellenőrző Turing-gép $\implies n+1$ időkorlátos
Definíció.

$$TIME(t(n)) := \left\{ L \subseteq I^* \;\middle|\; \begin{array}{l} L \text{ felismerhető egy } O(t(n)) \text{ időkorlátos} \\ M \text{ Turing-géppel} \end{array} \right\}.$$

$TIME(t(n)) \implies$ létezik $ct(n)$ időkorlátos TG
n hosszú x inputokon a számítás *mindig befejeződik* legfeljebb $ct(n)$ lépésben, tekintet nélkül arra, hogy $x \in L$ igaz-e
$\implies TIME(t(n)) \subset \mathcal{R}$

Példa: $TIME(n) = \{$az $O(n),$ azaz lineáris időben felismerhető nyelvek$\}$.

A P nyelvosztály

Definíció. $\mathrm{P} = \cup_{k \geq 1} \boldsymbol{TIME}(\boldsymbol{n^k})$, *a polinom időben felismerhető nyelvek osztálya.*

A P nyelvosztály

Definíció. $\mathrm{P} = \cup_{k\geq 1} TIME(n^k)$, *a polinom időben felismerhető nyelvek osztálya.*

Tétel. *Ha az L nyelv $n^{\log n}$-nél rövidebb időben nem ismerhető fel, akkor $L \notin \mathrm{P}$.*

A P nyelvosztály

Definíció. $\mathrm{P} = \cup_{k\geq 1} TIME(n^k)$, *a polinom időben felismerhető nyelvek osztálya.*
Tétel. *Ha az L nyelv $n^{\log n}$-nél rövidebb időben nem ismerhető fel, akkor $L \notin \mathrm{P}$.*

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy $L \in \mathrm{P}$. $\implies$ van olyan $k > 0$, melyre $L \in TIME(n^k) \implies n^{\log n} \leq cn^k$ teljesülne végtelen sok n-re $\lightning$

A P nyelvosztály

Definíció. $\mathrm{P} = \cup_{k \geq 1} TIME(n^k)$, *a polinom időben felismerhető nyelvek osztálya.*

Tétel. *Ha az* L *nyelv* $n^{\log n}$*-nél rövidebb időben nem ismerhető fel, akkor* $L \notin \mathrm{P}$.

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy $L \in \mathrm{P}$. $\implies$ van olyan $k > 0$, melyre $L \in TIME(n^k) \implies n^{\log n} \leq cn^k$ teljesülne végtelen sok n-re ↯

Tárkorlát

Definíció. *Legyen* $s : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *olyan függvény, melyre minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *számmal igaz, hogy* $s(n) \geq \log_2 n$. *Az* M *Turing-gép* $s(n)$ tárkorlátos, *ha* n *hosszú inputokon legfeljebb* $s(n)$ *tárcellát használ a* munkaszalagokon *(azaz* $S_M(n) \leq s(n)$*).*

Tárkorlát

Definíció. *Legyen* $s : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *olyan függvény, melyre minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *számmal igaz, hogy* $s(n) \geq \log_2 n$*. Az* M *Turing-gép* $s(n)$ tárkorlátos*, ha* n *hosszú inputokon legfeljebb* $s(n)$ *tárcellát használ a* munkaszalagokon *(azaz* $S_M(n) \leq s(n)$*).*

$s(n) \geq \log_2 n \implies$ Ennyi hely kell ahhoz, hogy egy n cellából álló szalagrészt címezni tudjunk.

Tárkorlát

Definíció. *Legyen* $s : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *olyan függvény, melyre minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *számmal igaz, hogy* $s(n) \geq \log_2 n$*. Az* M *Turing-gép* $s(n)$ tárkorlátos*, ha* n *hosszú inputokon legfeljebb* $s(n)$ *tárcellát használ a* munkaszalagokon *(azaz* $S_M(n) \leq s(n)$*).*

$s(n) \geq \log_2 n \implies$ Ennyi hely kell ahhoz, hogy egy n cellából álló szalagrészt címezni tudjunk.

Definíció.

$$SPACE(s(n)) := \left\{ L \subseteq I^* \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{az } L \text{ felismerhető egy } O(s(n)) \\ \text{tárkorlátos } M \text{ Turing-géppel} \end{array} \right\}.$$

Tárkorlát

Definíció. *Legyen* $s : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *olyan függvény, melyre minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *számmal igaz, hogy* $s(n) \geq \log_2 n$*. Az* M *Turing-gép* $s(n)$ tárkorlátos*, ha* n *hosszú inputokon legfeljebb* $s(n)$ *tárcellát használ a* munkaszalagokon *(azaz* $S_M(n) \leq s(n)$*).*

$s(n) \geq \log_2 n \implies$ Ennyi hely kell ahhoz, hogy egy n cellából álló szalagrészt címezni tudjunk.

Definíció.

$$SPACE(s(n)) := \left\{ L \subseteq I^* \,\middle|\, \begin{array}{c} \textit{az } L \textit{ felismerhető egy } O(s(n)) \\ \textit{tárkorlátos } M \textit{ Turing-géppel} \end{array} \right\}.$$

Ez nem biztos, hogy egyátalán megáll!

Tárkorlát

Definíció. *Legyen* $s : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *olyan függvény, melyre minden* $n \in \mathbb{Z}^+$ *számmal igaz, hogy* $s(n) \geq \log_2 n$*. Az* M *Turing-gép* $s(n)$ tárkorlátos*, ha* n *hosszú inputokon legfeljebb* $s(n)$ *tárcellát használ a* munkaszalagokon *(azaz* $S_M(n) \leq s(n)$*).*

$s(n) \geq \log_2 n \implies$ Ennyi hely kell ahhoz, hogy egy n cellából álló szalagrészt címezni tudjunk.

Definíció.

$$SPACE(s(n)) := \left\{ L \subseteq I^* \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{az } L \text{ felismerhető egy } O(s(n)) \\ \text{tárkorlátos } M \text{ Turing-géppel} \end{array} \right\}.$$

Ez nem biztos, hogy egyátalán megáll!

Példa: $SPACE(\log n)$ a *logaritmikus tárban felismerhető nyelvek* osztálya.

Függvényosztályok

Definíció. $FTIME(t(n)$:= *az* $O(t(n))$ *időkorlátos TG-k által kiszámítható* $f : I^* \longrightarrow I^*$ *függvények osztálya.*

Definíció. $FSPACE(s(n))$:= *az* $O(s(n))$ *tárkorlátos TG-k által kiszámítható* $f : I^* \longrightarrow I^*$ *(parciális) függvények osztálya.*

Definíció. $\mathrm{FP} := \cup_{k\geq 1} FTIME(n^k)$.

Tár–idő-tétel

Tétel. [tár–idő-tétel] *Ha $L \in SPACE(s(n))$, akkor van olyan L-től függő c konstans, mellyel $L \in TIME(c^{s(n)})$ teljesül.*

Tár–idő-tétel

Tétel. [tár–idő-tétel] *Ha $L \in SPACE(s(n))$, akkor van olyan L-től függő c konstans, mellyel $L \in TIME(c^{s(n)})$ teljesül.*

Bizonyítás: Legyen M egy $S(n) = c_1 s(n)$ tárkorlátos ($c_1 \geq 1$) k-szalagos TG, mely felismeri L-et $\Longrightarrow$ konstruálunk olyan $O(c^{S(n)})$-időkorlátos N TG-t, melynek a nyelve szintén L.

Tár–idő-tétel

Tétel. [tár–idő-tétel] *Ha $L \in SPACE(s(n))$, akkor van olyan L-től függő c konstans, mellyel $L \in TIME(c^{s(n)})$ teljesül.*

Bizonyítás: Legyen M egy $S(n) = c_1 s(n)$ tárkorlátos ($c_1 \geq 1$) k-szalagos TG, mely felismeri L-et $\Longrightarrow$ konstruálunk olyan $O(c^{S(n)})$-időkorlátos N TG-t, melynek a nyelve szintén L.

a gép egy pillanatnyi helyzete $\Longrightarrow$ az input, a munkaszalagok tartalma, a gép aktuális belső állapota, valamint a fejek helyzete

Tár–idő-tétel

Tétel. [tár–idő-tétel] *Ha $L \in SPACE(s(n))$, akkor van olyan L-től függő c konstans, mellyel $L \in TIME(c^{s(n)})$ teljesül.*

Bizonyítás: Legyen M egy $S(n) = c_1 s(n)$ tárkorlátos ($c_1 \geq 1$) k-szalagos TG, mely felismeri L-et $\Longrightarrow$ konstruálunk olyan $O(c^{S(n)})$-időkorlátos N TG-t, melynek a nyelve szintén L.

a gép egy pillanatnyi helyzete $\Longrightarrow$ az input, a munkaszalagok tartalma, a gép aktuális belső állapota, valamint a fejek helyzete $\Longrightarrow$ PHL

Tár–idő-tétel

Tétel. [tár–idő-tétel] *Ha $L \in SPACE(s(n))$, akkor van olyan L-től függő c konstans, mellyel $L \in TIME(c^{s(n)})$ teljesül.*

Bizonyítás: Legyen M egy $S(n) = c_1 s(n)$ tárkorlátos ($c_1 \geq 1$) k-szalagos TG, mely felismeri L-et $\Longrightarrow$ konstruálunk olyan $O(c^{S(n)})$-időkorlátos N TG-t, melynek a nyelve szintén L.

a gép egy pillanatnyi helyzete $\Longrightarrow$ az input, a munkaszalagok tartalma, a gép aktuális belső állapota, valamint a fejek helyzete $\Longrightarrow$ PHL
kétszer ugyanaz a PHL $\Longrightarrow$ utána ugyanaz fog történni $\Longrightarrow$ végtelen ciklus

Tár–idő-tétel

Tétel. [tár–idő-tétel] *Ha* $L \in SPACE(s(n))$, *akkor van olyan* L*-től függő* c *konstans, mellyel* $L \in TIME(c^{s(n)})$ *teljesül.*

Bizonyítás: Legyen M egy $S(n) = c_1 s(n)$ tárkorlátos ($c_1 \geq 1$) k-szalagos TG, mely felismeri L-et $\Longrightarrow$ konstruálunk olyan $O(c^{S(n)})$-időkorlátos N TG-t, melynek a nyelve szintén L.

a gép egy pillanatnyi helyzete $\Longrightarrow$ az input, a munkaszalagok tartalma, a gép aktuális belső állapota, valamint a fejek helyzete $\Longrightarrow$ PHL
kétszer ugyanaz a PHL $\Longrightarrow$ utána ugyanaz fog történni $\Longrightarrow$ végtelen ciklus
Belátjuk, hogy ha M tárkortátos $\Longrightarrow$ véges sok PHL lehet $\Longrightarrow$ biztos végtelen ciklusba fog kerülni (ha nem áll meg)

Tár–idő-tétel

Tétel. [tár–idő-tétel] *Ha $L \in SPACE(s(n))$, akkor van olyan L-től függő c konstans, mellyel $L \in TIME(c^{s(n)})$ teljesül.*

Bizonyítás: Legyen M egy $S(n) = c_1 s(n)$ tárkorlátos ($c_1 \geq 1$) k-szalagos TG, mely felismeri L-et $\Longrightarrow$ konstruálunk olyan $O(c^{S(n)})$-időkorlátos N TG-t, melynek a nyelve szintén L.

a gép egy pillanatnyi helyzete $\Longrightarrow$ az input, a munkaszalagok tartalma, a gép aktuális belső állapota, valamint a fejek helyzete $\Longrightarrow$ PHL
kétszer ugyanaz a PHL $\Longrightarrow$ utána ugyanaz fog történni $\Longrightarrow$ végtelen ciklus
Belátjuk, hogy ha M tárkortátos $\Longrightarrow$ véges sok PHL lehet $\Longrightarrow$ biztos végtelen ciklusba fog kerülni (ha nem áll meg)
Ezt kellene felismerni $O(c^{S(n)})$ idő alatt.

Tár–idő-tétel

Tétel. [tár–idő-tétel] *Ha $L \in SPACE(s(n))$, akkor van olyan L-től függő c konstans, mellyel $L \in TIME(c^{s(n)})$ teljesül.*

Bizonyítás: Legyen M egy $S(n) = c_1 s(n)$ tárkorlátos ($c_1 \geq 1$) k-szalagos TG, mely felismeri L-et $\Longrightarrow$ konstruálunk olyan $O(c^{S(n)})$-időkorlátos N TG-t, melynek a nyelve szintén L.

a gép egy pillanatnyi helyzete $\Longrightarrow$ az input, a munkaszalagok tartalma, a gép aktuális belső állapota, valamint a fejek helyzete $\Longrightarrow$ PHL
kétszer ugyanaz a PHL $\Longrightarrow$ utána ugyanaz fog történni $\Longrightarrow$ végtelen ciklus
Belátjuk, hogy ha M tárkortátos $\Longrightarrow$ véges sok PHL lehet $\Longrightarrow$ biztos végtelen ciklusba fog kerülni (ha nem áll meg)
Ezt kellene felismerni $O(c^{S(n)})$ idő alatt.

Hány darab PHL lehetséges összesen, ha a gépet n hosszú inputtal indítjuk?

Tár–idő-tétel

Tétel. [tár–idő-tétel] *Ha $L \in SPACE(s(n))$, akkor van olyan L-től függő c konstans, mellyel $L \in TIME(c^{s(n)})$ teljesül.*

Bizonyítás: Legyen M egy $S(n) = c_1 s(n)$ tárkorlátos ($c_1 \geq 1$) k-szalagos TG, mely felismeri L-et $\Longrightarrow$ konstruálunk olyan $O(c^{S(n)})$-időkorlátos N TG-t, melynek a nyelve szintén L.

a gép egy pillanatnyi helyzete $\Longrightarrow$ az input, a munkaszalagok tartalma, a gép aktuális belső állapota, valamint a fejek helyzete $\Longrightarrow$ PHL
kétszer ugyanaz a PHL $\Longrightarrow$ utána ugyanaz fog történni $\Longrightarrow$ végtelen ciklus
Belátjuk, hogy ha M tárkortátos $\Longrightarrow$ véges sok PHL lehet $\Longrightarrow$ biztos végtelen ciklusba fog kerülni (ha nem áll meg)
Ezt kellene felismerni $O(c^{S(n)})$ idő alatt.

Hány darab PHL lehetséges összesen, ha a gépet n hosszú inputtal indítjuk?

$$\#PHL \leq |Q||T|^{S(n)}(n+1)S(n)^k \leq \text{konstans} \cdot c_2^{S(n)} =: t,$$

(az $(n+1)$ tényező az input fej lehetséges helyzeteinek a száma, az $S(n)^k$ tényező pedig a többi fej lehetséges helyzeteinek a száma)

Ha t lépés után lelőjük $\checkmark$ de lehet, hogy t nem rekurzív $\lightning$

Ha t lépés után lelőjük $\surd$ de lehet, hogy t nem rekurzív $\lightning$

N konstrukciója: megduplázzuk M-et $\longrightarrow$ M_1 és M_2

Ha t lépés után lelőjük $\checkmark$ de lehet, hogy t nem rekurzív $\lightning$

N konstrukciója: megduplázzuk M-et $\longrightarrow$ M_1 és M_2
M_1-et elindítjuk az x inputtal.

Ha t lépés után lelőjük $\surd$ de lehet, hogy t nem rekurzív $\lightning$

N konstrukciója: megduplázzuk M-et $\longrightarrow$ M_1 és M_2
M_1-et elindítjuk az x inputtal.
Minden egyes lépése után ideiglenesen megállítjuk
$\longrightarrow$ ekkor M_2-t elindítjuk x inputtal a kezdő állapotból, és működtetjük legfeljebb addig a lépésig, ahol M_1 tart ($\longrightarrow$ ennek sorszáma l, amit $O(S(n))$ extra cellán tárolunk és léptetünk.)

Ha t lépés után lelőjük $\surd$ de lehet, hogy t nem rekurzív $\lightning$

N konstrukciója: megduplázzuk M-et $\longrightarrow$ M_1 és M_2
M_1-et elindítjuk az x inputtal.
Minden egyes lépése után ideiglenesen megállítjuk
$\longrightarrow$ ekkor M_2-t elindítjuk x inputtal a kezdő állapotból, és működtetjük legfeljebb addig a lépésig, ahol M_1 tart ($\longrightarrow$ ennek sorszáma l, amit $O(S(n))$ extra cellán tárolunk és léptetünk.)

Ha valamely $j < l$-re az M_2 gép j-edik lépés utáni PHL-je megegyezik M_1-ével $\Longrightarrow$ végtelen ciklus $\Longrightarrow$ $x \notin L$ $\Longrightarrow$ N megáll elutasítva x-et

Ha t lépés után lelőjük $\surd$ de lehet, hogy t nem rekurzív $\lightning$

N konstrukciója: megduplázzuk M-et $\longrightarrow$ M_1 és M_2
M_1-et elindítjuk az x inputtal.
Minden egyes lépése után ideiglenesen megállítjuk
$\longrightarrow$ ekkor M_2-t elindítjuk x inputtal a kezdő állapotból, és működtetjük legfeljebb addig a lépésig, ahol M_1 tart ($\longrightarrow$ ennek sorszáma l, amit $O(S(n))$ extra cellán tárolunk és léptetünk.)

Ha valamely $j < l$-re az M_2 gép j-edik lépés utáni PHL-je megegyezik M_1-ével $\Longrightarrow$ végtelen ciklus $\Longrightarrow x \notin L \Longrightarrow N$ megáll elutasítva x-et
Ha ilyen ismétlődés nem fordult elő, akkor meglépjük M_1 következő, $l+1$-edik lépését, stb.

Ha t lépés után lelőjük $\checkmark$ de lehet, hogy t nem rekurzív $\lightning$

N konstrukciója: megduplázzuk M-et $\longrightarrow$ M_1 és M_2
M_1-et elindítjuk az x inputtal.
Minden egyes lépése után ideiglenesen megállítjuk
$\longrightarrow$ ekkor M_2-t elindítjuk x inputtal a kezdő állapotból, és működtetjük legfeljebb addig a lépésig, ahol M_1 tart ($\longrightarrow$ ennek sorszáma l, amit $O(S(n))$ extra cellán tárolunk és léptetünk.)

Ha valamely $j < l$-re az M_2 gép j-edik lépés utáni PHL-je megegyezik M_1-ével $\Longrightarrow$ végtelen ciklus $\Longrightarrow$ $x \notin L$ $\Longrightarrow$ N megáll elutasítva x-et
Ha ilyen ismétlődés nem fordult elő, akkor meglépjük M_1 következő, $l + 1$-edik lépését, stb.
ha M_1 megáll elfogadva (elutasítva) x-et $\Longrightarrow$ N is megáll elfogadva (elutasítva) x-et.

$\Longrightarrow$ felismerjük a végtelen ciklusokat

Ha t lépés után lelőjük $\surd$ de lehet, hogy t nem rekurzív $\lightning$

N konstrukciója: megduplázzuk M-et $\longrightarrow$ M_1 és M_2
M_1-et elindítjuk az x inputtal.
Minden egyes lépése után ideiglenesen megállítjuk
$\longrightarrow$ ekkor M_2-t elindítjuk x inputtal a kezdő állapotból, és működtetjük legfeljebb addig a lépésig, ahol M_1 tart ($\longrightarrow$ ennek sorszáma l, amit $O(S(n))$ extra cellán tárolunk és léptetünk.)

Ha valamely $j < l$-re az M_2 gép j-edik lépés utáni PHL-je megegyezik M_1-ével $\Longrightarrow$ végtelen ciklus $\Longrightarrow$ $x \notin L$ $\Longrightarrow$ N megáll elutasítva x-et
Ha ilyen ismétlődés nem fordult elő, akkor meglépjük M_1 következő, $l+1$-edik lépését, stb.
ha M_1 megáll elfogadva (elutasítva) x-et $\Longrightarrow$ N is megáll elfogadva (elutasítva) x-et.

$\Longrightarrow$ felismerjük a végtelen ciklusokat
mindig teljesül $l \leq t$ $\Longrightarrow$ a maximális futási idő legfeljebb
$O(t^2) = O((c_2^{S(n)})^2) = O((c_2^2)^{c_1 s(n)})$ $\Longrightarrow$ $c = c_2^{2c_1}$ $\surd$

Ha t lépés után lelőjük $\surd$ de lehet, hogy t nem rekurzív ↯

N konstrukciója: megduplázzuk M-et $\longrightarrow M_1$ és M_2
M_1-et elindítjuk az x inputtal.
Minden egyes lépése után ideiglenesen megállítjuk
$\longrightarrow$ ekkor M_2-t elindítjuk x inputtal a kezdő állapotból, és működtetjük legfeljebb addig a lépésig, ahol M_1 tart ($\longrightarrow$ ennek sorszáma l, amit $O(S(n))$ extra cellán tárolunk és léptetünk.)

Ha valamely $j < l$-re az M_2 gép j-edik lépés utáni PHL-je megegyezik M_1-ével $\Longrightarrow$ végtelen ciklus $\Longrightarrow x \notin L \Longrightarrow N$ megáll elutasítva x-et
Ha ilyen ismétlődés nem fordult elő, akkor meglépjük M_1 következő, $l+1$-edik lépését, stb.
ha M_1 megáll elfogadva (elutasítva) x-et $\Longrightarrow N$ is megáll elfogadva (elutasítva) x-et.

$\Longrightarrow$ felismerjük a végtelen ciklusokat
mindig teljesül $l \leq t \Longrightarrow$ a maximális futási idő legfeljebb
$O(t^2) = O((c_2^{S(n)})^2) = O((c_2^2)^{c_1 s(n)}) \Longrightarrow c = c_2^{2c_1}$ $\surd$
a tárfelhasználás közben nem nőtt lényegesen

Tétel. *Ha* $f \in FSPACE(s(n))$, *akkor van olyan* f*-től függő* c *konstans, mellyel* $f \in FTIME(c^{s(n)})$.

Tétel. *Ha* $f \in FSPACE(s(n))$*, akkor van olyan* f*-től függő* c *konstans, mellyel* $f \in FTIME(c^{s(n)})$*.*

Tétel. $TIME(t(n)) = coTIME(t(n))$.

Tétel. *Ha $f \in FSPACE(s(n))$, akkor van olyan f-től függő c konstans, mellyel $f \in FTIME(c^{s(n)})$.*

Tétel. $TIME(t(n)) = coTIME(t(n))$.

Bizonyítás: Megcseréljük M elfogadó és elutasító (azaz nem elfogadó) állapotait $\surd$

Tétel. *Ha $f \in FSPACE(s(n))$, akkor van olyan f-től függő c konstans, mellyel $f \in FTIME(c^{s(n)})$.*

Tétel. $TIME(t(n)) = coTIME(t(n))$.

Bizonyítás: Megcseréljük M elfogadó és elutasító (azaz nem elfogadó) állapotait $\checkmark$

Tétel. $SPACE(s(n)) = coSPACE(s(n))$.

Tétel. *Ha $f \in FSPACE(s(n))$, akkor van olyan f-től függő c konstans, mellyel $f \in FTIME(c^{s(n)})$.*

Tétel. $TIME(t(n)) = coTIME(t(n))$.

Bizonyítás: Megcseréljük M elfogadó és elutasító (azaz nem elfogadó) állapotait ✓

Tétel. $SPACE(s(n)) = coSPACE(s(n))$.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a tár–idő-tétel szimulációját. Az adódó N TG szintén $O(s(n))$ tárkorlátos, és *minden inputra megáll*.

Tétel. *Ha $f \in FSPACE(s(n))$, akkor van olyan f-től függő c konstans, mellyel $f \in FTIME(c^{s(n)})$.*

Tétel. $TIME(t(n)) = coTIME(t(n))$.

Bizonyítás: Megcseréljük M elfogadó és elutasító (azaz nem elfogadó) állapotait $\checkmark$

Tétel. $SPACE(s(n)) = coSPACE(s(n))$.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a tár–idő-tétel szimulációját. Az adódó N TG szintén $O(s(n))$ tárkorlátos, és *minden inputra megáll*.
Most cseréljük fel az elfogadó és az elutasító állapotokat.

Tétel. *Ha $f \in FSPACE(s(n))$, akkor van olyan f-től függő c konstans, mellyel $f \in FTIME(c^{s(n)})$.*

Tétel. $TIME(t(n)) = coTIME(t(n))$.

Bizonyítás: Megcseréljük M elfogadó és elutasító (azaz nem elfogadó) állapotait $\surd$

Tétel. $SPACE(s(n)) = coSPACE(s(n))$.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a tár–idő-tétel szimulációját. Az adódó N TG szintén $O(s(n))$ tárkorlátos, és *minden inputra megáll*.
Most cseréljük fel az elfogadó és az elutasító állapotokat.

Definíció. $\mathrm{EXPTIME} := \cup_{k \geq 1} TIME(2^{n^k})$.

Tétel. *Ha $f \in FSPACE(s(n))$, akkor van olyan f-től függő c konstans, mellyel $f \in FTIME(c^{s(n)})$.*

Tétel. $TIME(t(n)) = coTIME(t(n))$.

Bizonyítás: Megcseréljük M elfogadó és elutasító (azaz nem elfogadó) állapotait $\surd$

Tétel. $SPACE(s(n)) = coSPACE(s(n))$.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a tár–idő-tétel szimulációját. Az adódó N TG szintén $O(s(n))$ tárkorlátos, és *minden inputra megáll*.
Most cseréljük fel az elfogadó és az elutasító állapotokat.

Definíció. EXPTIME $:= \cup_{k\geq 1} TIME(2^{n^k})$.
Definíció. PSPACE $:= \cup_{k\geq 1} SPACE(n^k)$.

Tétel. *Ha $f \in FSPACE(s(n))$, akkor van olyan f-től függő c konstans, mellyel $f \in FTIME(c^{s(n)})$.*

Tétel. $TIME(t(n)) = coTIME(t(n))$.

Bizonyítás: Megcseréljük M elfogadó és elutasító (azaz nem elfogadó) állapotait $\checkmark$

Tétel. $SPACE(s(n)) = coSPACE(s(n))$.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a tár–idő-tétel szimulációját. Az adódó N TG szintén $O(s(n))$ tárkorlátos, és *minden inputra megáll*.
Most cseréljük fel az elfogadó és az elutasító állapotokat.

Definíció. $\mathrm{EXPTIME} := \cup_{k \geq 1} TIME(2^{n^k})$.
Definíció. $\mathrm{PSPACE} := \cup_{k \geq 1} SPACE(n^k)$.

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$

Tétel. P $\subseteq$ PSPACE $\subseteq$ EXPTIME

Bizonyítás: Ha M egy $t(n)$ időkorlátos TG $\Longrightarrow$ $ct(n)$ tárkorlátos $\Longleftarrow$

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$

Bizonyítás: Ha $\boldsymbol{M}$ egy $\boldsymbol{t(n)}$ időkorlátos TG $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{ct(n)}$ tárkorlátos $\Longleftarrow$
$\Longrightarrow \boldsymbol{TIME(n^k)} \subseteq \boldsymbol{SPACE(n^k)} \Longrightarrow \mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ $\checkmark$

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$

Bizonyítás: Ha $\boldsymbol{M}$ egy $\boldsymbol{t(n)}$ időkorlátos TG $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{ct(n)}$ tárkorlátos $\Longleftarrow$
$\Longrightarrow \boldsymbol{TIME(n^k)} \subseteq \boldsymbol{SPACE(n^k)} \Longrightarrow \mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ $\checkmark$
Legyen $\boldsymbol{L} \in \mathrm{PSPACE} \Longrightarrow \boldsymbol{L} \in \boldsymbol{SPACE(n^k)}$, valamely $\boldsymbol{k}$-ra

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$

Bizonyítás: Ha M egy $t(n)$ időkorlátos TG $\Longrightarrow$ $ct(n)$ tárkorlátos $\Longleftarrow$
$\Longrightarrow$ $TIME(n^k) \subseteq SPACE(n^k)$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ $\checkmark$
Legyen $L \in \mathrm{PSPACE}$ $\Longrightarrow$ $L \in SPACE(n^k)$, valamely k-ra
tár–idő-tétel $\Longrightarrow$ van olyan $c > 0$, hogy
$L \in TIME(c^{n^k}) \subseteq TIME(2^{\lceil c \rceil n^k}) \subseteq TIME(2^{n^{k+1}}) \subseteq \mathrm{EXPTIME}.$ $\checkmark$

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$

Bizonyítás: Ha M egy $t(n)$ időkorlátos TG $\Longrightarrow$ $ct(n)$ tárkorlátos $\Longleftarrow$
$\Longrightarrow TIME(n^k) \subseteq SPACE(n^k) \Longrightarrow \mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ $\surd$
Legyen $L \in \mathrm{PSPACE} \Longrightarrow L \in SPACE(n^k)$, valamely k-ra
tár–idő-tétel $\Longrightarrow$ van olyan $c > 0$, hogy
$L \in TIME(c^{n^k}) \subseteq TIME(2^{\lceil c \rceil n^k}) \subseteq TIME(2^{n^{k+1}}) \subseteq \mathrm{EXPTIME}.$ $\surd$

Tétel. $TIME(t(n)) \subset \mathcal{R}$, $SPACE(s(n)) \subset \mathcal{R}$ és $\mathrm{EXPTIME} \subset \mathcal{R}$.

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$

Bizonyítás: Ha M egy $t(n)$ időkorlátos TG $\implies ct(n)$ tárkorlátos $\impliedby$
$\implies TIME(n^k) \subseteq SPACE(n^k) \implies \mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ $\surd$
Legyen $L \in \mathrm{PSPACE} \implies L \in SPACE(n^k)$, valamely k-ra
tár–idő-tétel $\implies$ van olyan $c > 0$, hogy
$L \in TIME(c^{n^k}) \subseteq TIME(2^{\lceil c \rceil n^k}) \subseteq TIME(2^{n^{k+1}}) \subseteq \mathrm{EXPTIME}.$ $\surd$

Tétel. $TIME(t(n)) \subset \mathcal{R}$, $SPACE(s(n)) \subset \mathcal{R}$ és $\mathrm{EXPTIME} \subset \mathcal{R}$.

Bizonyítás: Csak azt látjuk be, hogy $\exists L$ rekurzív nyelv, hogy $L \notin \mathrm{EXPTIME}$, a többi állítás hasonlóan kijön

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$

Bizonyítás: Ha M egy $t(n)$ időkorlátos TG $\Longrightarrow$ $ct(n)$ tárkorlátos $\Longleftarrow$
$\Longrightarrow TIME(n^k) \subseteq SPACE(n^k) \Longrightarrow \mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ $\surd$
Legyen $L \in \mathrm{PSPACE} \Longrightarrow L \in SPACE(n^k)$, valamely k-ra
tár–idő-tétel $\Longrightarrow$ van olyan $c > 0$, hogy
$L \in TIME(c^{n^k}) \subseteq TIME(2^{\lceil c \rceil n^k}) \subseteq TIME(2^{n^{k+1}}) \subseteq \mathrm{EXPTIME}.$ $\surd$

Tétel. $TIME(t(n)) \subset \mathcal{R}$, $SPACE(s(n)) \subset \mathcal{R}$ és $\mathrm{EXPTIME} \subset \mathcal{R}$.

Bizonyítás: Csak azt látjuk be, hogy $\exists L$ rekurzív nyelv, hogy $L \notin \mathrm{EXPTIME}$, a többi állítás hasonlóan kijön

$L = \{w \in I^*;$ az M_w TG létezik, és legfeljebb $2^{2^{|w|}}$ lépésben elutasítja w-t$\}$.

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$

Bizonyítás: Ha M egy $t(n)$ időkorlátos TG $\Longrightarrow$ $ct(n)$ tárkorlátos $\Longleftarrow$
$\Longrightarrow TIME(n^k) \subseteq SPACE(n^k) \Longrightarrow \mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ $\surd$
Legyen $L \in \mathrm{PSPACE} \Longrightarrow L \in SPACE(n^k)$, valamely k-ra
tár–idő-tétel $\Longrightarrow$ van olyan $c > 0$, hogy
$L \in TIME(c^{n^k}) \subseteq TIME(2^{\lceil c \rceil n^k}) \subseteq TIME(2^{n^{k+1}}) \subseteq \mathrm{EXPTIME}.$ $\surd$

Tétel. $TIME(t(n)) \subset \mathcal{R}$, $SPACE(s(n)) \subset \mathcal{R}$ és $\mathrm{EXPTIME} \subset \mathcal{R}$.

Bizonyítás: Csak azt látjuk be, hogy $\exists L$ rekurzív nyelv, hogy $L \notin \mathrm{EXPTIME}$, a többi állítás hasonlóan kijön

$$L = \{w \in I^*;\ \text{az } M_w \text{ TG létezik, és legfeljebb } 2^{2^{|w|}} \text{ lépésben elutasítja } w\text{-t}\}.$$

Ez rekurzív, mert mindig megálló univerzális TG felismeri.

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$

Bizonyítás: Ha M egy $t(n)$ időkorlátos TG $\implies ct(n)$ tárkorlátos $\impliedby$
$\implies TIME(n^k) \subseteq SPACE(n^k) \implies \mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ $\checkmark$
Legyen $L \in \mathrm{PSPACE} \implies L \in SPACE(n^k)$, valamely k-ra
tár–idő-tétel $\implies$ van olyan $c > 0$, hogy
$L \in TIME(c^{n^k}) \subseteq TIME(2^{\lceil c \rceil n^k}) \subseteq TIME(2^{n^{k+1}}) \subseteq \mathrm{EXPTIME}.$ $\checkmark$

Tétel. $TIME(t(n)) \subset \mathcal{R}$, $SPACE(s(n)) \subset \mathcal{R}$ és $\mathrm{EXPTIME} \subset \mathcal{R}$.

Bizonyítás: Csak azt látjuk be, hogy $\exists L$ rekurzív nyelv, hogy $L \notin \mathrm{EXPTIME}$, a többi állítás hasonlóan kijön

$$L = \{w \in I^*;\ \text{az } M_w \text{ TG létezik, és legfeljebb } 2^{2^{|w|}} \text{ lépésben elutasítja } w\text{-t}\}.$$

Ez rekurzív, mert mindig megálló univerzális TG felismeri.

Belátjuk, hogy $L \notin TIME(2^{2^{n-1}})$

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$

Bizonyítás: Ha M egy $t(n)$ időkorlátos TG $\Longrightarrow$ $ct(n)$ tárkorlátos $\Longleftarrow$
$\Longrightarrow TIME(n^k) \subseteq SPACE(n^k) \Longrightarrow \mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ $\surd$
Legyen $L \in \mathrm{PSPACE} \Longrightarrow L \in SPACE(n^k)$, valamely k-ra
tár–idő-tétel $\Longrightarrow$ van olyan $c > 0$, hogy
$L \in TIME(c^{n^k}) \subseteq TIME(2^{\lceil c \rceil n^k}) \subseteq TIME(2^{n^{k+1}}) \subseteq \mathrm{EXPTIME}.$ $\surd$

Tétel. $TIME(t(n)) \subset \mathcal{R}$, $SPACE(s(n)) \subset \mathcal{R}$ és $\mathrm{EXPTIME} \subset \mathcal{R}$.

Bizonyítás: Csak azt látjuk be, hogy $\exists L$ rekurzív nyelv, hogy $L \notin \mathrm{EXPTIME}$, a többi állítás hasonlóan kijön

$$L = \{w \in I^*;\ \text{az } M_w \text{ TG létezik, és legfeljebb } 2^{2^{|w|}} \text{ lépésben elutasítja } w\text{-t}\}.$$

Ez rekurzív, mert mindig megálló univerzális TG felismeri.

Belátjuk, hogy $L \notin TIME(2^{2^{n-1}})$
Indirekt, tegyük fel, hogy L felismerhető egy $c2^{2^{n-1}}$ időkorlátos M TG-vel.

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$

Bizonyítás: Ha M egy $t(n)$ időkorlátos TG $\Longrightarrow$ $ct(n)$ tárkorlátos $\Longleftarrow$
$\Longrightarrow TIME(n^k) \subseteq SPACE(n^k) \Longrightarrow \mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ $\checkmark$
Legyen $L \in \mathrm{PSPACE} \Longrightarrow L \in SPACE(n^k)$, valamely k-ra
tár–idő-tétel $\Longrightarrow$ van olyan $c > 0$, hogy
$L \in TIME(c^{n^k}) \subseteq TIME(2^{\lceil c \rceil n^k}) \subseteq TIME(2^{n^{k+1}}) \subseteq \mathrm{EXPTIME}.$ $\checkmark$

Tétel. $TIME(t(n)) \subset \mathcal{R}$, $SPACE(s(n)) \subset \mathcal{R}$ és $\mathrm{EXPTIME} \subset \mathcal{R}$.

Bizonyítás: Csak azt látjuk be, hogy $\exists L$ rekurzív nyelv, hogy $L \notin \mathrm{EXPTIME}$, a többi állítás hasonlóan kijön

$$L = \{w \in I^*;\ \text{az } M_w \text{ TG létezik, és legfeljebb } 2^{2^{|w|}} \text{ lépésben elutasítja } w\text{-t}\}.$$

Ez rekurzív, mert mindig megálló univerzális TG felismeri.

Belátjuk, hogy $L \notin TIME(2^{2^{n-1}})$
Indirekt, tegyük fel, hogy L felismerhető egy $c2^{2^{n-1}}$ időkorlátos M TG-vel.
Legyen n_0 olyan nagy, hogy $c2^{2^{n-1}} < 2^{2^n}$ teljesüljön, ha $n > n_0$.

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$

Bizonyítás: Ha M egy $t(n)$ időkorlátos TG $\Longrightarrow$ $ct(n)$ tárkorlátos $\Longleftarrow$
$\Longrightarrow TIME(n^k) \subseteq SPACE(n^k) \Longrightarrow \mathrm{P} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ $\surd$
Legyen $L \in \mathrm{PSPACE} \Longrightarrow L \in SPACE(n^k)$, valamely k-ra
tár–idő-tétel $\Longrightarrow$ van olyan $c > 0$, hogy
$L \in TIME(c^{n^k}) \subseteq TIME(2^{\lceil c \rceil n^k}) \subseteq TIME(2^{n^{k+1}}) \subseteq \mathrm{EXPTIME}.$ $\surd$

Tétel. $TIME(t(n)) \subset \mathcal{R}$, $SPACE(s(n)) \subset \mathcal{R}$ és $\mathrm{EXPTIME} \subset \mathcal{R}$.

Bizonyítás: Csak azt látjuk be, hogy $\exists L$ rekurzív nyelv, hogy $L \notin \mathrm{EXPTIME}$, a többi állítás hasonlóan kijön

$L = \{w \in I^*;$ az M_w TG létezik, és legfeljebb $2^{2^{|w|}}$ lépésben elutasítja w-t$\}$.

Ez rekurzív, mert mindig megálló univerzális TG felismeri.

Belátjuk, hogy $L \notin TIME(2^{2^{n-1}})$
Indirekt, tegyük fel, hogy L felismerhető egy $c2^{2^{n-1}}$ időkorlátos M TG-vel.
Legyen n_0 olyan nagy, hogy $c2^{2^{n-1}} < 2^{2^n}$ teljesüljön, ha $n > n_0$.

Legyen w egy n_0-nál hosszabb szó, melyre M_w létezik, és ugyanúgy viselkedik mint M (ilyen van).

Legyen w egy n_0-nál hosszabb szó, melyre M_w létezik, és ugyanúgy viselkedik mint M (ilyen van).

$\Longrightarrow$ ha $w \in L$, akkor M_w elfogadja w-t $c2^{2^{|w|-1}} < 2^{2^{|w|}}$ lépésben

$\Longrightarrow w \notin L$

Legyen w egy n_0-nál hosszabb szó, melyre M_w létezik, és ugyanúgy viselkedik mint M (ilyen van).

$\implies$ ha $w \in L$, akkor M_w elfogadja w-t $c2^{2^{|w|-1}} < 2^{2^{|w|}}$ lépésben

$\implies w \notin L$

fordítva is $\lightning$

Nemdeterminisztikus Turing-gépek

Olyan TG, ahol az átmenetfüggvény nem igazi függvény, több lehetőség van:

$$\boldsymbol{\delta(q, a) \subseteq Q \times T \times \{\text{jobb}, \text{bal}, \text{helyben}\}.}$$

Gép futása, számítási út: Mint a TG, csak ha több lehetőség van, választ egyet, ha nincs értelmezve, akkor megáll.

Nemdeterminisztikus Turing-gépek

Olyan TG, ahol az átmenetfüggvény nem igazi függvény, több lehetőség van:

$$\delta(q, a) \subseteq Q \times T \times \{\text{jobb}, \text{bal}, \text{helyben}\}.$$

Gép futása, számítási út: Mint a TG, csak ha több lehetőség van, választ egyet, ha nincs értelmezve, akkor megáll.

Definíció. *Az M NTG elfogadja az $x \in I^*$ inputot, ha az M-et x bemenettel a kiinduló helyzetből indítva van legalább egy elfogadó (egy elfogadó állapotban véget érő) számítási út.*

Nemdeterminisztikus Turing-gépek

Olyan TG, ahol az átmenetfüggvény nem igazi függvény, több lehetőség van:

$$\delta(q, a) \subseteq Q \times T \times \{\text{jobb}, \text{bal}, \text{helyben}\}.$$

Gép futása, számítási út: Mint a TG, csak ha több lehetőség van, választ egyet, ha nincs értelmezve, akkor megáll.

Definíció. *Az M NTG elfogadja az $x \in I^*$ inputot, ha az M-et x bemenettel a kiinduló helyzetből indítva van legalább egy elfogadó (egy elfogadó állapotban véget érő) számítási út.*

Tétel. *Az $x \in I^*$ input szó pontosan akkor nincs L_M-ben, ha az M gépet x inputtal indítva nincs elfogadó számítási út.*

Nemdeterminisztikus Turing-gépek

Olyan TG, ahol az átmenetfüggvény nem igazi függvény, több lehetőség van:

$$\delta(q,a) \subseteq Q \times T \times \{\text{jobb}, \text{bal}, \text{helyben}\}.$$

Gép futása, számítási út: Mint a TG, csak ha több lehetőség van, választ egyet, ha nincs értelmezve, akkor megáll.

Definíció. *Az M NTG* elfogadja *az $x \in I^*$ inputot, ha az M-et x bemenettel a kiinduló helyzetből indítva van legalább egy elfogadó (egy elfogadó állapotban véget érő) számítási út.*

Tétel. *Az $x \in I^*$ input szó pontosan akkor nincs L_M-ben, ha az M gépet x inputtal indítva nincs elfogadó számítási út.*

NTG számítási $\Longrightarrow$ gyökeres fa $\Longrightarrow$ csúcsok $\leftrightarrow$ PHL

Időkorlátos NTG

Definíció. *Egy M nemdeterminisztikus Turing-gép $t(n)$ időkorlátos, ha n hosszúságú inputokon M minden számítási út mentén legfeljebb $t(n)$ lépést téve megáll.*

Időkorlátos NTG

Definíció. *Egy M nemdeterminisztikus Turing-gép $t(n)$ időkorlátos, ha n hosszúságú inputokon M minden számítási út mentén legfeljebb $t(n)$ lépést téve megáll.*

Senki nem tud egy $t(n)$ időkorlátos NTG-t $O(t(n))$ időben szimulálni.

Időkorlátos NTG

Definíció. *Egy M nemdeterminisztikus Turing-gép $t(n)$ időkorlátos, ha n hosszúságú inputokon M minden számítási út mentén legfeljebb $t(n)$ lépést téve megáll.*

Senki nem tud egy $t(n)$ időkorlátos NTG-t $O(t(n))$ időben szimulálni.

Definíció. $NTIME(t(n)) :=$
$\{$*az $O(t(n))$ időkorlátos NTG-k által elfogadott nyelvek*$\}$.

Időkorlátos NTG

Definíció. *Egy M nemdeterminisztikus Turing-gép $t(n)$ időkorlátos, ha n hosszúságú inputokon M minden számítási út mentén legfeljebb $t(n)$ lépést téve megáll.*

Senki nem tud egy $t(n)$ időkorlátos NTG-t $O(t(n))$ időben szimulálni.

Definíció. $NTIME(t(n)) :=$
$\{$*az $O(t(n))$ időkorlátos NTG-k által elfogadott nyelvek*$\}$.

Definíció. $\mathrm{NP} := \cup_{k\geq 1} NTIME(n^k)$.

Időkorlátos NTG

Definíció. *Egy M nemdeterminisztikus Turing-gép $t(n)$ időkorlátos, ha n hosszúságú inputokon M minden számítási út mentén legfeljebb $t(n)$ lépést téve megáll.*

Senki nem tud egy $t(n)$ időkorlátos NTG-t $O(t(n))$ időben szimulálni.

Definíció. $NTIME(t(n)) :=$
$\{$*az $O(t(n))$ időkorlátos NTG-k által elfogadott nyelvek*$\}$.

Definíció. $\mathrm{NP} := \cup_{k\geq 1} NTIME(n^k)$.

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$.

Időkorlátos NTG

Definíció. *Egy M nemdeterminisztikus Turing-gép $t(n)$ időkorlátos, ha n hosszúságú inputokon M minden számítási út mentén legfeljebb $t(n)$ lépést téve megáll.*

Senki nem tud egy $t(n)$ időkorlátos NTG-t $O(t(n))$ időben szimulálni.

Definíció. $NTIME(t(n)) :=$
$\{$*az* $O(t(n))$ *időkorlátos NTG-k által elfogadott nyelvek*$\}$.

Definíció. $\mathrm{NP} := \cup_{k\geq 1} NTIME(n^k)$.

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$.

Bizonyítás: A NTG egyben TG is ugyanolyan időkorláttal
$\Longrightarrow TIME(n^k) \subseteq NTIME(n^k) \Longrightarrow \checkmark$

Időkorlátos NTG

Definíció. *Egy M nemdeterminisztikus Turing-gép $t(n)$ időkorlátos, ha n hosszúságú inputokon M minden számítási út mentén* legfeljebb $t(n)$ *lépést téve megáll.*

Senki nem tud egy $t(n)$ időkorlátos NTG-t $O(t(n))$ időben szimulálni.

Definíció. $NTIME(t(n)) :=$
$\{$*az $O(t(n))$ időkorlátos NTG-k által elfogadott nyelvek*$\}$.

Definíció. $\mathrm{NP} := \cup_{k\geq 1} NTIME(n^k)$.

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$.

Bizonyítás: A NTG egyben TG is ugyanolyan időkorláttal
$\Longrightarrow TIME(n^k) \subseteq NTIME(n^k) \Longrightarrow \checkmark$

A legfontosabb megoldatlan probléma

$$P \stackrel{?}{=} NP$$

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$.

Bizonyítás: $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \implies \mathrm{coP} \subseteq \mathrm{coNP}$.

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$.

Bizonyítás: $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \implies \mathrm{coP} \subseteq \mathrm{coNP}$.
$\mathrm{P} = \mathrm{coP} \implies \quad \surd$

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$.

Bizonyítás: $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \implies \mathrm{coP} \subseteq \mathrm{coNP}$.
$\mathrm{P} = \mathrm{coP} \implies \quad \surd$

Szintén megoldatlan problémák:

$$\mathrm{P} \stackrel{?}{=} \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}.$$

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$.

Bizonyítás: $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \implies \mathrm{coP} \subseteq \mathrm{coNP}$.
$\mathrm{P} = \mathrm{coP} \implies \surd$

Szintén megoldatlan problémák:

$$\mathrm{P} \stackrel{?}{=} \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}.$$

$$\mathrm{NP} \stackrel{?}{=} \mathrm{coNP}.$$

Tétel. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$.

Bizonyítás: $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \implies \mathrm{coP} \subseteq \mathrm{coNP}$.
$\mathrm{P} = \mathrm{coP} \implies \checkmark$

Szintén megoldatlan problémák:

$$\mathrm{P} \stackrel{?}{=} \mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}.$$

$$\mathrm{NP} \stackrel{?}{=} \mathrm{coNP}.$$

Nemdeterminisztikus felismerés

Hogyan tudjuk belátni, hogy $L \in \mathrm{NP}$?

Nemdeterminisztikus felismerés

Hogyan tudjuk belátni, hogy $L \in \mathrm{NP}$?

Legyen M kétszalagos determinisztikus TG, inputja két részből áll, egyik része $x \in I^*$ az első szalagon van, a másik része $y \in I^*$ a másikon $\Longrightarrow$ ez csak olvasható

Nemdeterminisztikus felismerés

Hogyan tudjuk belátni, hogy $L \in \mathrm{NP}$?

Legyen M kétszalagos determinisztikus TG, inputja két részből áll, egyik része $x \in I^*$ az első szalagon van, a másik része $y \in I^*$ a másikon $\Longrightarrow$ ez csak olvasható
$\Longrightarrow$ az M *súgásszalagja*

Nemdeterminisztikus felismerés

Hogyan tudjuk belátni, hogy $L \in \mathrm{NP}$?

Legyen M kétszalagos determinisztikus TG, inputja két részből áll, egyik része $x \in I^*$ az első szalagon van, a másik része $y \in I^*$ a másikon $\Longrightarrow$ ez csak olvasható
$\Longrightarrow$ az M *súgásszalagja*

Az M által felismert L_1 nyelv $\Longrightarrow$ azon (x, y) szópárok halmaza ($x, y \in I^*$), melyeket M elfogad

Nemdeterminisztikus felismerés

Hogyan tudjuk belátni, hogy $L \in \mathrm{NP}$?

Legyen M kétszalagos determinisztikus TG, inputja két részből áll, egyik része $x \in I^*$ az első szalagon van, a másik része $y \in I^*$ a másikon $\Longrightarrow$ ez csak olvasható
$\Longrightarrow$ az M *súgásszalagja*

Az M által felismert L_1 nyelv $\Longrightarrow$ azon (x, y) szópárok halmaza ($x, y \in I^*$), melyeket M elfogad
Definíció. *Az M által nemdeterminisztikusan felismert L nyelv a következő:*

$x \in L$ akkor, és csak akkor, ha van olyan y súgás, hogy $(x, y) \in L_1$.

Nemdeterminisztikus felismerés

Hogyan tudjuk belátni, hogy $L \in \mathrm{NP}$?

Legyen M kétszalagos determinisztikus TG, inputja két részből áll, egyik része $x \in I^*$ az első szalagon van, a másik része $y \in I^*$ a másikon $\Longrightarrow$ ez csak olvasható
$\Longrightarrow$ az M *súgásszalagja*

Az M által felismert L_1 nyelv $\Longrightarrow$ azon (x, y) szópárok halmaza ($x, y \in I^*$), melyeket M elfogad
Definíció. *Az M által nemdeterminisztikusan felismert L nyelv a következő:*

$x \in L$ akkor, és csak akkor, ha van olyan y súgás, hogy $(x, y) \in L_1$.

Nem tudunk semmit arról, hogyan lehet jó súgást találni.

Nemdeterminisztikus felismerés

Hogyan tudjuk belátni, hogy $L \in \mathrm{NP}$?

Legyen M kétszalagos determinisztikus TG, inputja két részből áll, egyik része $x \in I^*$ az első szalagon van, a másik része $y \in I^*$ a másikon $\Longrightarrow$ ez csak olvasható
$\Longrightarrow$ az M *súgásszalagja*

Az M által felismert L_1 nyelv $\Longrightarrow$ azon (x, y) szópárok halmaza ($x, y \in I^*$), melyeket M elfogad
Definíció. *Az M által nemdeterminisztikusan felismert L nyelv a következő:*

$x \in L$ akkor, és csak akkor, ha van olyan y súgás, hogy $(x, y) \in L_1$.

Nem tudunk semmit arról, hogyan lehet jó súgást találni.

Tanú–tétel

Tétel. *[tanú-tétel] Egy $L \subseteq I^*$ nyelvre a következő két állítás egyenértékű:*
(a) $L \in \mathrm{NP}$.
(b) Van olyan $c > 0$ állandó, továbbá egy $L_1 \in \mathrm{P}$ nyelv, mely olyan $(x, y) \in (I^*)^2$ párokból áll, hogy $|y| \leq |x|^c$ és $x \in I^*$ esetén $x \in L$ pontosan akkor, ha van $y \in I^*$ úgy, hogy $(x, y) \in L_1$.

Tanú–tétel

Tétel. [tanú-tétel] *Egy* $L \subseteq I^*$ *nyelvre a következő két állítás egyenértékű:*
(a) $L \in \mathrm{NP}$.
(b) Van olyan $c > 0$ *állandó, továbbá egy* $L_1 \in \mathrm{P}$ *nyelv, mely olyan* $(x, y) \in (I^*)^2$ *párokból áll, hogy* $|y| \leq |x|^c$ *és* $x \in I^*$ *esetén* $x \in L$ *pontosan akkor, ha van* $y \in I^*$ *úgy, hogy* $(x, y) \in L_1$.

Bizonyítás: $(a) \Rightarrow (b)$ **:**

Tanú–tétel

Tétel. [tanú-tétel] *Egy* $L \subseteq I^*$ *nyelvre a következő két állítás egyenértékű:*
(a) $L \in \mathrm{NP}$.
(b) Van olyan $c > 0$ *állandó, továbbá egy* $L_1 \in \mathrm{P}$ *nyelv, mely olyan* $(x, y) \in (I^*)^2$ *párokból áll, hogy* $|y| \leq |x|^c$ *és* $x \in I^*$ *esetén* $x \in L$ *pontosan akkor, ha van* $y \in I^*$ *úgy, hogy* $(x, y) \in L_1$.

Bizonyítás: $(a) \Rightarrow (b)$:
$L \in \mathrm{NP} \implies \exists \quad n^{c_1}$ időkorlátos N NTG, mely felismeri L-et

Tanú–tétel

Tétel. [tanú-tétel] *Egy $L \subseteq I^*$ nyelvre a következő két állítás egyenértékű:*
(a) $L \in \mathrm{NP}$.
(b) Van olyan $c > 0$ állandó, továbbá egy $L_1 \in \mathrm{P}$ nyelv, mely olyan $(x, y) \in (I^*)^2$ párokból áll, hogy $|y| \leq |x|^c$ és $x \in I^*$ esetén $x \in L$ pontosan akkor, ha van $y \in I^*$ úgy, hogy $(x, y) \in L_1$.

Bizonyítás: $(a) \Rightarrow (b)$:
$L \in \mathrm{NP} \implies \exists \quad n^{c_1}$ időkorlátos N NTG, mely felismeri L-et
Tegyük fel, hogy N-nek egy lépésnél legfeljebb d elágazási lehetősége van

Tanú–tétel

Tétel. *[tanú-tétel] Egy $L \subseteq I^*$ nyelvre a következő két állítás egyenértékű:*
(a) $L \in \mathrm{NP}$.
(b) Van olyan $c > 0$ állandó, továbbá egy $L_1 \in \mathrm{P}$ nyelv, mely olyan $(x, y) \in (I^*)^2$ párokból áll, hogy $|y| \leq |x|^c$ és $x \in I^*$ esetén $x \in L$ pontosan akkor, ha van $y \in I^*$ úgy, hogy $(x, y) \in L_1$.

Bizonyítás: $(a) \Rightarrow (b)$:
$L \in \mathrm{NP} \implies \exists \quad n^{c_1}$ időkorlátos N NTG, mely felismeri L-et
Tegyük fel, hogy N-nek egy lépésnél legfeljebb d elágazási lehetősége van
Adunk egy M-et és egy megfelelő súgást

Tanú–tétel

Tétel. *[tanú-tétel] Egy $L \subseteq I^*$ nyelvre a következő két állítás egyenértékű:*
(a) $L \in \mathrm{NP}$.
(b) Van olyan $c > 0$ állandó, továbbá egy $L_1 \in \mathrm{P}$ nyelv, mely olyan $(x, y) \in (I^*)^2$ párokból áll, hogy $|y| \leq |x|^c$ és $x \in I^*$ esetén $x \in L$ pontosan akkor, ha van $y \in I^*$ úgy, hogy $(x, y) \in L_1$.

Bizonyítás: $(a) \Rightarrow (b)$ **:**
$L \in \mathrm{NP} \implies \exists \quad n^{c_1}$ időkorlátos N NTG, mely felismeri L-et
Tegyük fel, hogy N-nek egy lépésnél legfeljebb d elágazási lehetősége van
Adunk egy M-et és egy megfelelő súgást

$x \in L$, $|x| = n \implies y = y_1 y_2 \cdots y_m$ legyen az x elfogadását leíró számítási útja

Tanú–tétel

Tétel. [tanú-tétel] *Egy* $L \subseteq I^*$ *nyelvre a következő két állítás egyenértékű:*
(a) $L \in \mathrm{NP}$.
(b) Van olyan $c > 0$ *állandó, továbbá egy* $L_1 \in \mathrm{P}$ *nyelv, mely olyan* $(x, y) \in (I^*)^2$ *párokból áll, hogy* $|y| \leq |x|^c$ *és* $x \in I^*$ *esetén* $x \in L$ *pontosan akkor, ha van* $y \in I^*$ *úgy, hogy* $(x, y) \in L_1$.

Bizonyítás: $(a) \Rightarrow (b)$:
$L \in \mathrm{NP} \implies \exists \quad n^{c_1}$ időkorlátos N NTG, mely felismeri L-et
Tegyük fel, hogy N-nek egy lépésnél legfeljebb d elágazási lehetősége van
Adunk egy M-et és egy megfelelő súgást

$x \in L$, $|x| = n \implies y = y_1 y_2 \cdots y_m$ legyen az x elfogadását leíró számítási útja
$\implies |y| \leq n^{c_1} \lceil \log_2(d+1) \rceil \leq n^c$

Tanú–tétel

Tétel. [tanú-tétel] *Egy $L \subseteq I^*$ nyelvre a következő két állítás egyenértékű:*
(a) $L \in \mathrm{NP}$.
(b) Van olyan $c > 0$ állandó, továbbá egy $L_1 \in \mathrm{P}$ nyelv, mely olyan $(x, y) \in (I^*)^2$ párokból áll, hogy $|y| \le |x|^c$ és $x \in I^*$ esetén $x \in L$ pontosan akkor, ha van $y \in I^*$ úgy, hogy $(x, y) \in L_1$.

Bizonyítás: $(a) \Rightarrow (b)$:
$L \in \mathrm{NP} \implies \exists \quad n^{c_1}$ időkorlátos N NTG, mely felismeri L-et
Tegyük fel, hogy N-nek egy lépésnél legfeljebb d elágazási lehetősége van
Adunk egy M-et és egy megfelelő súgást

$x \in L$, $|x| = n \implies y = y_1 y_2 \cdots y_m$ legyen az x elfogadását leíró számítási útja
$\implies |y| \le n^{c_1} \lceil \log_2(d + 1) \rceil \le n^c$
Az M TG szimulálja N-et, úgy hogy mindig a kijelölt úton megy tovább

Tanú–tétel

Tétel. *[tanú-tétel] Egy $L \subseteq I^*$ nyelvre a következő két állítás egyenértékű:*
(a) $L \in \mathrm{NP}$.
(b) Van olyan $c > 0$ állandó, továbbá egy $L_1 \in \mathrm{P}$ nyelv, mely olyan $(x, y) \in (I^*)^2$ párokból áll, hogy $|y| \leq |x|^c$ és $x \in I^*$ esetén $x \in L$ pontosan akkor, ha van $y \in I^*$ úgy, hogy $(x, y) \in L_1$.

Bizonyítás: $(a) \Rightarrow (b)$:
$L \in \mathrm{NP} \implies \exists \quad n^{c_1}$ időkorlátos N NTG, mely felismeri L-et
Tegyük fel, hogy N-nek egy lépésnél legfeljebb d elágazási lehetősége van
Adunk egy M-et és egy megfelelő súgást

$x \in L$, $|x| = n \implies y = y_1 y_2 \cdots y_m$ legyen az x elfogadását leíró számítási útja
$\implies |y| \leq n^{c_1} \lceil \log_2(d + 1) \rceil \leq n^c$
Az M TG szimulálja N-et, úgy hogy mindig a kijelölt úton megy tovább
N egy lépését konstans időben szimulálja.

Tanú–tétel

Tétel. *[tanú-tétel] Egy $L \subseteq I^*$ nyelvre a következő két állítás egyenértékű:*
(a) $L \in \mathrm{NP}$.
(b) Van olyan $c > 0$ állandó, továbbá egy $L_1 \in \mathrm{P}$ nyelv, mely olyan $(x, y) \in (I^*)^2$ párokból áll, hogy $|y| \leq |x|^c$ és $x \in I^*$ esetén $x \in L$ pontosan akkor, ha van $y \in I^*$ úgy, hogy $(x, y) \in L_1$.

Bizonyítás: $(a) \Rightarrow (b)$ **:**
$L \in \mathrm{NP} \implies \exists \quad n^{c_1}$ időkorlátos N NTG, mely felismeri L-et
Tegyük fel, hogy N-nek egy lépésnél legfeljebb d elágazási lehetősége van
Adunk egy M-et és egy megfelelő súgást

$x \in L$, $|x| = n \implies y = y_1 y_2 \cdots y_m$ legyen az x elfogadását leíró számítási útja
$\implies |y| \leq n^{c_1} \lceil \log_2(d + 1) \rceil \leq n^c$
Az M TG szimulálja N-et, úgy hogy mindig a kijelölt úton megy tovább
N egy lépését konstans időben szimulálja.
N futási ideje éppen $c_2|y| \implies M$ futása az inputhoz képest lineáris

Tanú–tétel

Tétel. [tanú-tétel] *Egy $L \subseteq I^*$ nyelvre a következő két állítás egyenértékű:*
(a) $L \in \mathrm{NP}$.
(b) Van olyan $c > 0$ állandó, továbbá egy $L_1 \in \mathrm{P}$ nyelv, mely olyan $(x, y) \in (I^*)^2$ párokból áll, hogy $|y| \leq |x|^c$ és $x \in I^*$ esetén $x \in L$ pontosan akkor, ha van $y \in I^*$ úgy, hogy $(x, y) \in L_1$.

Bizonyítás: $(a) \Rightarrow (b)$:
$L \in \mathrm{NP} \implies \exists \quad n^{c_1}$ időkorlátos N NTG, mely felismeri L-et
Tegyük fel, hogy N-nek egy lépésnél legfeljebb d elágazási lehetősége van
Adunk egy M-et és egy megfelelő súgást

$x \in L$, $|x| = n \implies y = y_1 y_2 \cdots y_m$ legyen az x elfogadását leíró számítási útja
$\implies |y| \leq n^{c_1} \lceil \log_2(d + 1) \rceil \leq n^c$
Az M TG szimulálja N-et, úgy hogy mindig a kijelölt úton megy tovább
N egy lépését konstans időben szimulálja.
N futási ideje éppen $c_2|y| \implies M$ futása az inputhoz képest lineáris
Ha viszont $x \notin L \implies (x, y) \notin L_1 = L_M$ tetszőleges $y \in I^*$-ra $\checkmark$

Tanú–tétel

Tétel. [tanú-tétel] *Egy* $L \subseteq I^*$ *nyelvre a következő két állítás egyenértékű:*
(a) $L \in \mathrm{NP}$.
(b) Van olyan $c > 0$ *állandó, továbbá egy* $L_1 \in \mathrm{P}$ *nyelv, mely olyan* $(x, y) \in (I^*)^2$ *párokból áll, hogy* $|y| \leq |x|^c$ *és* $x \in I^*$ *esetén* $x \in L$ *pontosan akkor, ha van* $y \in I^*$ *úgy, hogy* $(x, y) \in L_1$.

Bizonyítás: $(a) \Rightarrow (b)$:
$L \in \mathrm{NP} \implies \exists \quad n^{c_1}$ időkorlátos N NTG, mely felismeri L-et
Tegyük fel, hogy N-nek egy lépésnél legfeljebb d elágazási lehetősége van
Adunk egy M-et és egy megfelelő súgást

$x \in L$, $|x| = n \implies y = y_1 y_2 \cdots y_m$ legyen az x elfogadását leíró számítási útja
$\implies |y| \leq n^{c_1} \lceil \log_2(d + 1) \rceil \leq n^c$
Az M TG szimulálja N-et, úgy hogy mindig a kijelölt úton megy tovább
N egy lépését konstans időben szimulálja.
N futási ideje éppen $c_2|y| \implies M$ futása az inputhoz képest lineáris
Ha viszont $x \notin L \implies (x, y) \notin L_1 = L_M$ tetszőleges $y \in I^*$-ra $\checkmark$

$(b) \Rightarrow (a)$: Egy $x \in L$ inputhoz a feltétel szerint van legfeljebb n^{c_1} hosszúságú y, hogy $(x, y) \in L_1$.

$(b) \Rightarrow (a)$ **:** Egy $x \in L$ inputhoz a feltétel szerint van legfeljebb n^{c_1} hosszúságú y, hogy $(x, y) \in L_1$.
Legyen N olyan mint M, de amikor M y-ból olvasna 0-t vagy 1-et
$\Longrightarrow$ N-ben δ-ra két lehetőség

$(b) \Rightarrow (a)$ **:** Egy $x \in L$ inputhoz a feltétel szerint van legfeljebb n^{c_1} hosszúságú y, hogy $(x, y) \in L_1$.
Legyen N olyan mint M, de amikor M y-ból olvasna $\mathbf{0}$-t vagy $\mathbf{1}$-et
$\Longrightarrow$ N-ben δ-ra két lehetőség
Az N NTG n^{c_2} időkorlátos $\checkmark$

$(b) \Rightarrow (a)$ **:** Egy $x \in L$ inputhoz a feltétel szerint van legfeljebb n^{c_1} hosszúságú y, hogy $(x, y) \in L_1$.
Legyen N olyan mint M, de amikor M y-ból olvasna 0-t vagy 1-et
$\Longrightarrow$ N-ben δ-ra két lehetőség
Az N NTG n^{c_2} időkorlátos $\surd$

Tétel. NP $\subseteq$ PSPACE

$(b) \Rightarrow (a)$ **:** Egy $x \in L$ inputhoz a feltétel szerint van legfeljebb n^{c_1} hosszúságú y, hogy $(x, y) \in L_1$.
Legyen N olyan mint M, de amikor M y-ból olvasna 0-t vagy 1-et
$\Longrightarrow$ N-ben δ-ra két lehetőség
Az N NTG n^{c_2} időkorlátos $\surd$

Tétel. $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$

Bizonyítás: Ha $L \in \mathrm{NP}$ $\Longrightarrow$ $\exists$ súgás

$(b) \Rightarrow (a)$ **:** Egy $x \in L$ inputhoz a feltétel szerint van legfeljebb n^{c_1} hosszúságú y, hogy $(x, y) \in L_1$.
Legyen N olyan mint M, de amikor M y-ból olvasna 0-t vagy 1-et
$\Longrightarrow$ N-ben δ-ra két lehetőség
Az N NTG n^{c_2} időkorlátos $\surd$

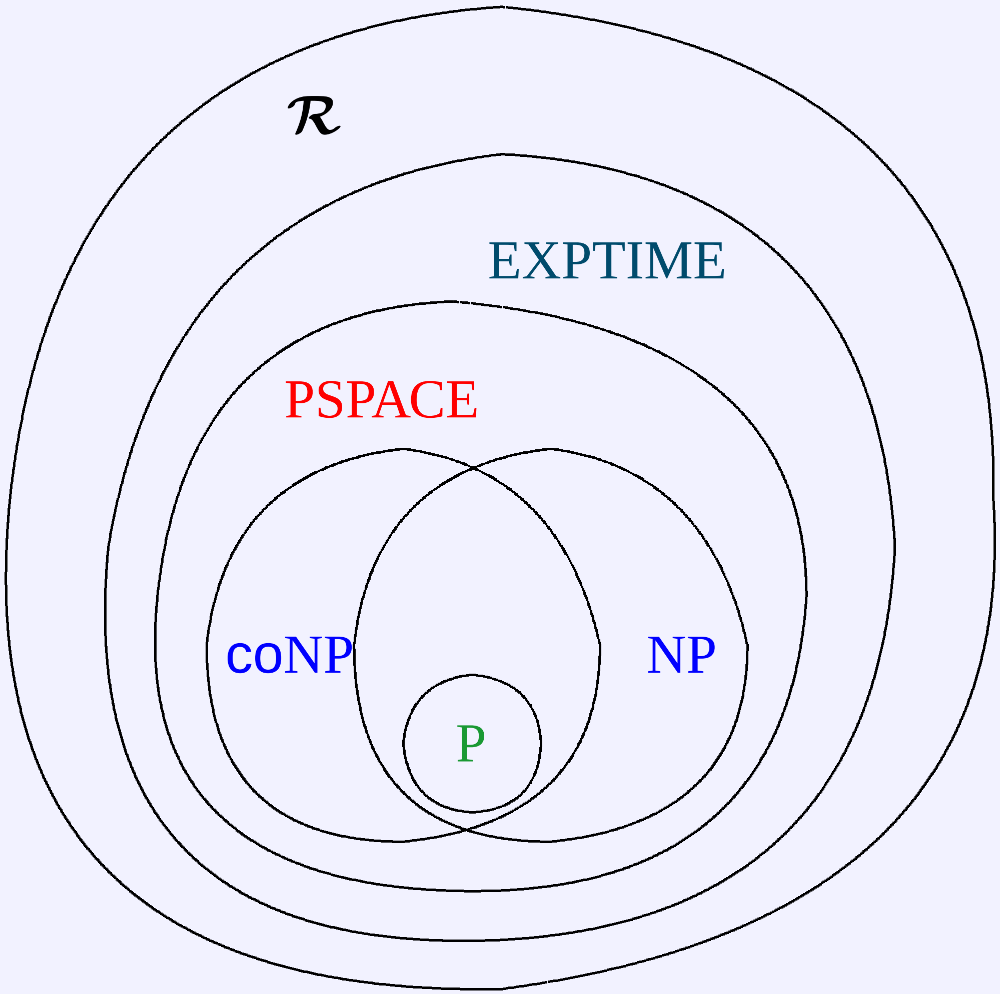
Tétel. $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$

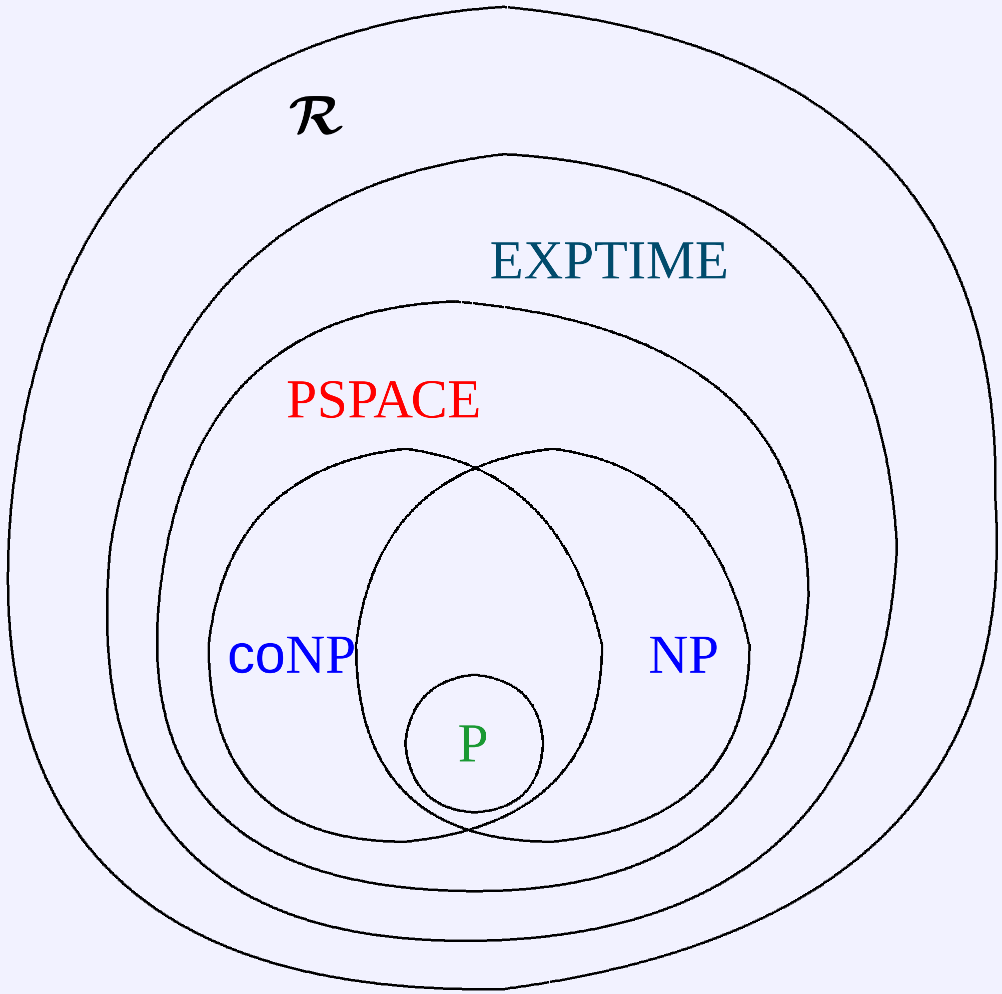
Bizonyítás: Ha $L \in \mathrm{NP} \Longrightarrow \exists$ súgás
Adott $x \in L$-re végigpróbáljuk az összes n^c szóbajövő súgást

$(b) \Rightarrow (a)$ **:** Egy $x \in L$ inputhoz a feltétel szerint van legfeljebb n^{c_1} hosszúságú y, hogy $(x, y) \in L_1$.
Legyen N olyan mint M, de amikor M y-ból olvasna 0-t vagy 1-et
$\Longrightarrow$ N-ben δ-ra két lehetőség
Az N NTG n^{c_2} időkorlátos $\surd$

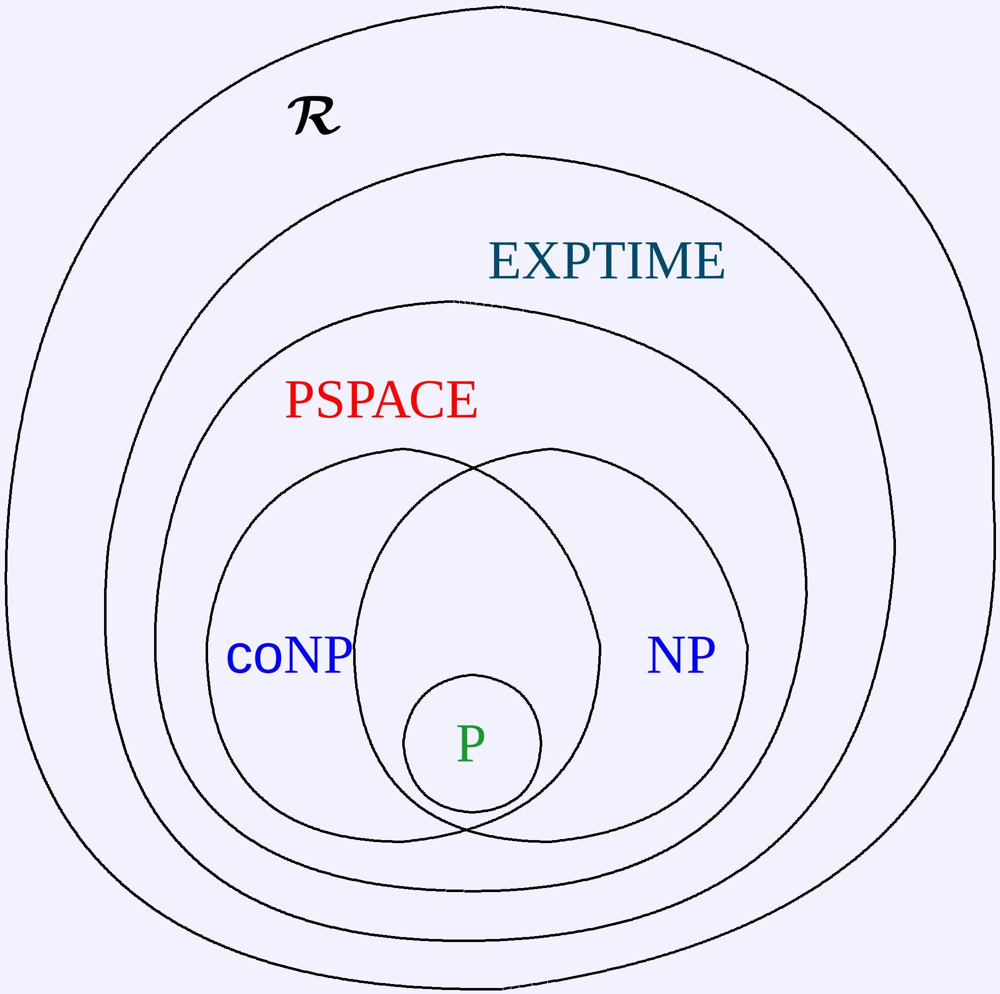
Tétel. $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$

Bizonyítás: Ha $L \in \mathrm{NP} \Longrightarrow \exists$ súgás
Adott $x \in L$-re végigpróbáljuk az összes n^c szóbajövő súgást
Ez nagyon sokáig tart, de csak $\log_2 2^{n^c} = n^c$ tár kell hozzá


$\mathcal{R}$
EXPTIME
PSPACE
coNP
NP
P



Sejtés: $\mathrm{P} \neq \mathrm{PSPACE}$



Sejtés: $\mathrm{P} \neq \mathrm{PSPACE}$

$$\mathrm{NP} \neq \mathrm{coNP} \Rightarrow \mathrm{P} \neq \mathrm{NP} \Rightarrow \mathrm{PSPACE} \neq \mathrm{P}$$