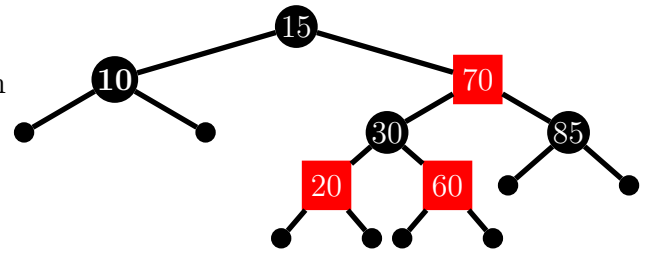


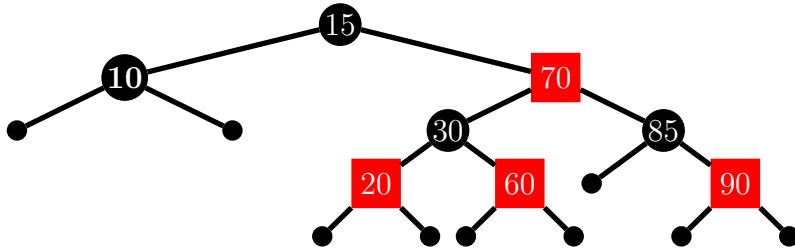
1.

(a) Szűrje be a jobboldali piros-fekete fába a 90-et.

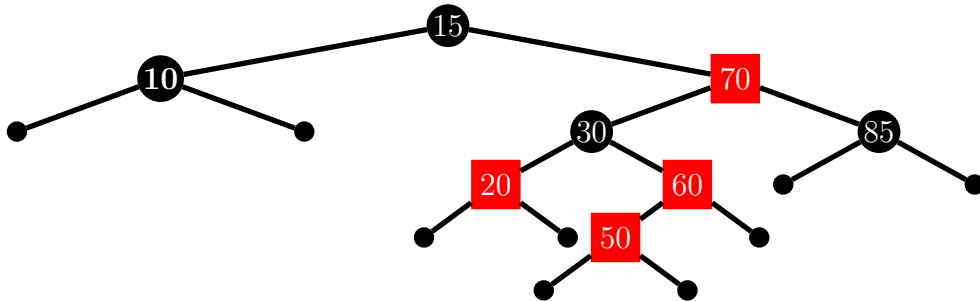
(b) Szűrje be a jobboldali piros-fekete fába (amiben nincs még benne a 90) az 50-et.



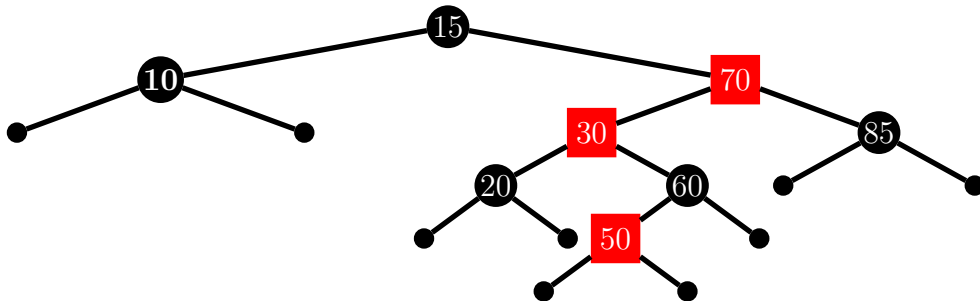
Megoldás: (a)



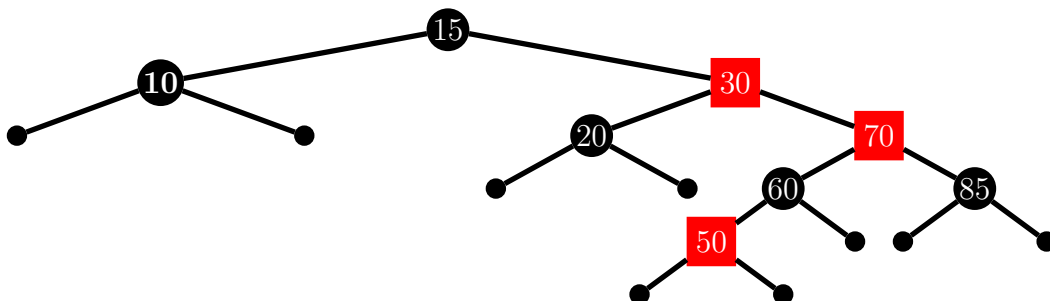
(b)



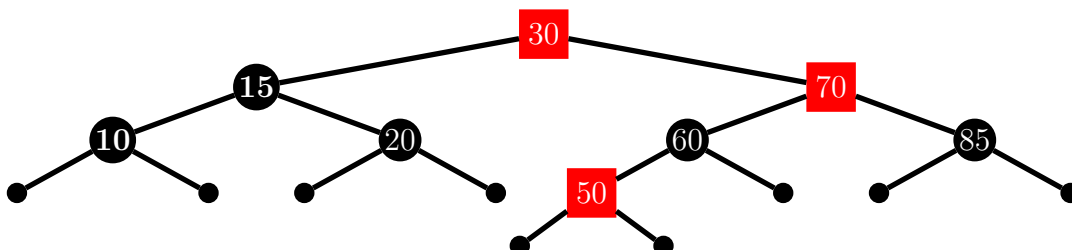
átszínezés (2.1)



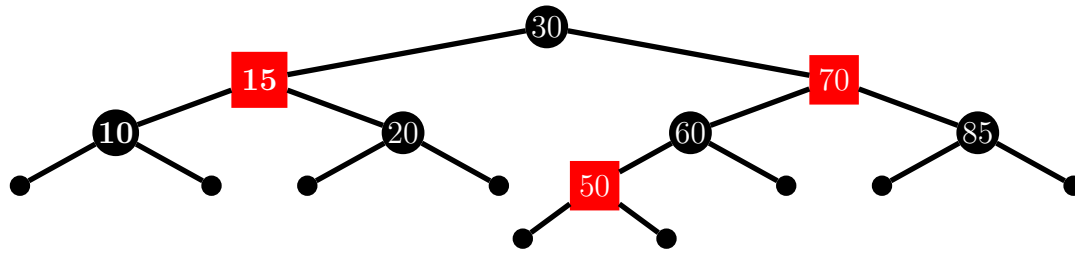
forgatás 30-70 él körül (2.2.1)



forgatás 15-30 él körül (2.2.2)

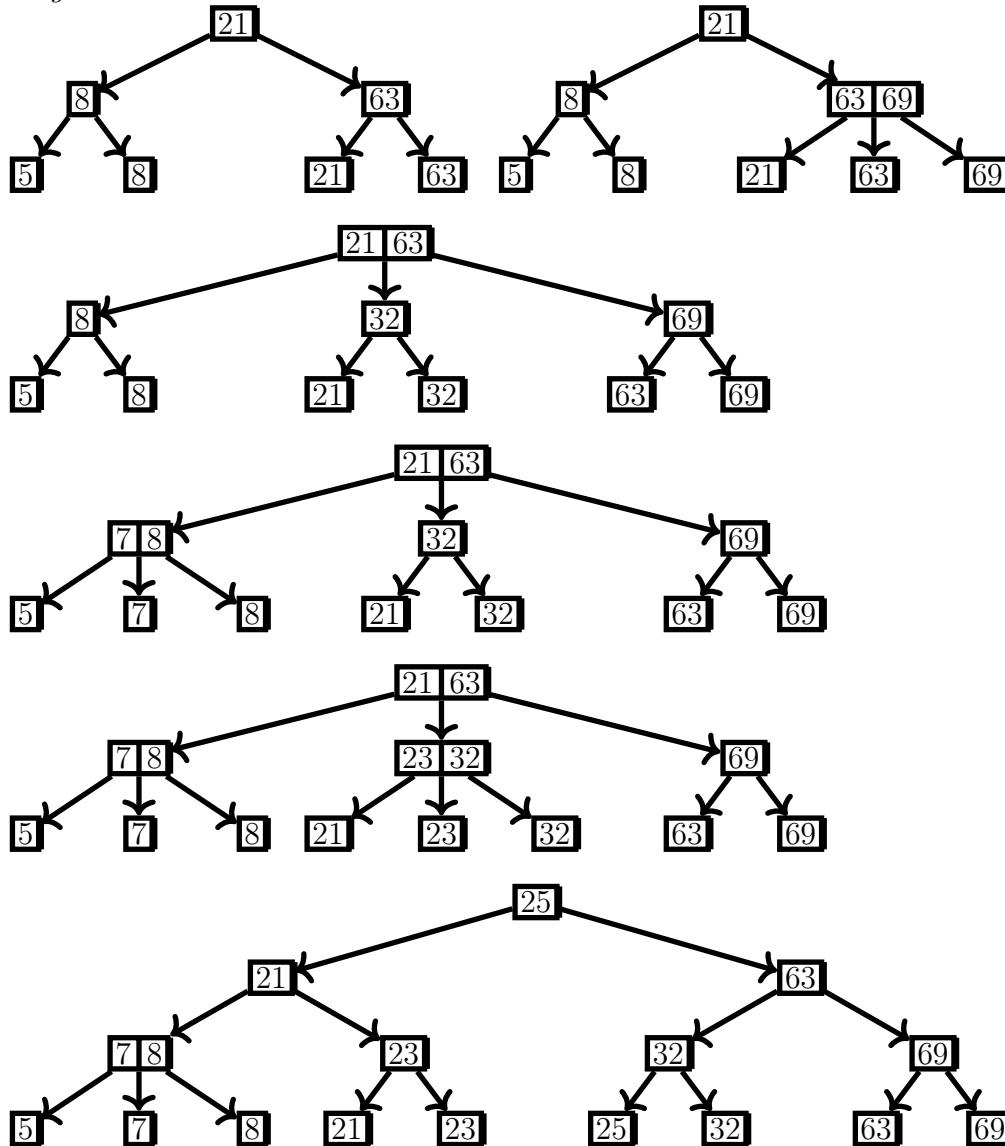


átszínezés (2.2.2)



2. Adjon egy 2-3-fát amely az 5, 8, 21, 63 elemeket tartalmazza, majd sorban szűrja be a 69, 32, 7, 23, 25 elemeket!

Megoldás:



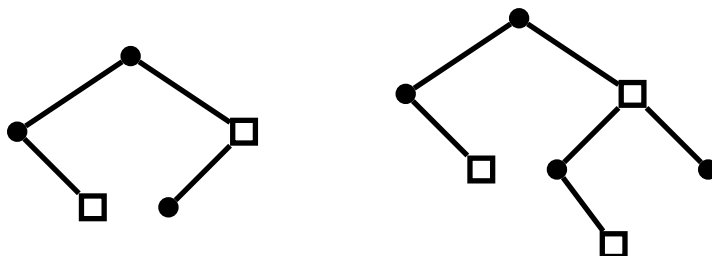
3. Az A keresőfában n egész számot, a B -ben pedig m -et tárolunk. Rendezzük az $n+m$ elemet $O(n+m)$ lépésben!

Megoldás: Tudjuk, hogy az inorder bejárás növekvő sorrendben adja meg a tárolt elemeket. Olvassuk így ki mindkét fából a tárolt számokat, és a két növekvő listát fésüljük össze. A kiolvasás (bejárás) lépésszáma arányos a fa méretével, az összefésülés $n + m - 1$ összehasonlítást és $n + m$ mozgatót igényel, összesen tehát a lépésszám $O(n + m)$.

4. Egy piros-fekete fában valamelyik, a gyökértől egy levélig vezető úton sorban az alábbi színű csúcsok vannak: fekete, piros, fekete, fekete. Mennyi a fában tárolt elemek számának a minimuma?

Megoldás: A gyökérnek két gyereke van, és a másik gyereknek is van még gyereke, ezért nem lehet levél. Hasonlóan, a piros másik gyerekének is van még gyereke, ezért az sem levél. A felsorolt csúcsok közül csak az utolsó lehet levél. Ezen kívül tehát van még két nem-levél. Ezért legalább 5 elem van a fában.

5. Lehetséges-e hogy az alábbi ábrákon egy-egy piros-fekete fa csúcsait ábrázoltuk? (A levelek nincsenek feltüntetve, a fekete kör fekete csúcsot, a fehér négyzet piros csúcsot jelöl.)



Megoldás: Az első esetben nem, mert a jobb oldali piros csúcsnál egyik irányban (a levéllel együtt) 2, a másik irányban csak 1 fekete csúcs van.

A második lehetséges, minden tulajdonság teljesül.

6. Mennyi a tárolható elemek számának minimuma, illetve maximuma egy olyan piros-fekete fában, aminek a fekete magassága 3?

Megoldás: Tudjuk, hogy a nem levél csúcsok száma legalább $2^3 - 1 = 7$, legalább ennyi elemet tárol a fa. Ha a fában csak fekete csúcsok vannak, akkor épp 7 elemet tud tárol, tehát 7 a minimum.

Azt is tudjuk, hogy a magassága legfeljebb $2 \cdot 3 = 6$, egy 6 magas fában pedig legfeljebb $2^6 - 1 = 63$ elem tárolható. Ezt el is lehet érni, ha váltakozva a szintek feketék és pirosak.

7. Egy 2-3-fa gyökerének három fia van, a benne szereplő két érték 40 és 50. Mennyi lehet a tárolt elemek minimális, illetve maximális száma, ha tudjuk, hogy csak pozitív egész számokat tárol a fa?

Megoldás: A feltételekből következik, hogy a gyökérnek 3 fia van, a balban 1 és 39 között, középen 40 és 49 között, a jobb oldalon 50-től tárolunk elemeket.

A minimális elemszámot nyilván úgy kapjuk, ha a gyökér gyerekei levelek, az x , 40, 50 elemeket tárolja a fa, ahol $1 \leq x \leq 39$ tetszőleges egész.

A maximális elemszámhoz nézzük, mit tudunk mondani a fa magasságáról! Mivel jelen esetben a három részfa közül a középső tárolhatja a legkevesebb elemet, ez fogja a korlátot adni. Ennek a magassága legfeljebb 4, és a lehetséges maximális 10 elem tárolásához kell is ennyi. Tehát a másik két részfa magassága is 4 lesz. Ezekben akkor kapjuk a lehető legtöbb levelet (tárolt elemet), ha mindig 3 felé ágaznak, azaz $2^4 - 1 = 15$ elemet tárolnak. Ennyi megengedett elem van is mindkét oldalon, tehát a maximális elemszám $10 + 2 \cdot 15 = 40$.

8. Egy piros-fekete fában jelölje x és y a gyökér két fiát. Tudjuk, hogy $fm(x) = fm(y)$, de az x csúcs két gyerekének különbözik a fekete magassága. Milyen színű az y csúcs?

Megoldás: Mivel a (fekete) magasságba a csúcs maga nem számít bele, ezért x és y színe azonos, de x két gyerekének színe különböző. Ez utóbbi viszont csak akkor lehet, ha x fekete (piros csúcs gyerekei mindig feketék), tehát y is fekete.

9. Lehetséges-e, hogy egy piros-fekete fából a preorder bejárás 6, 1, 5, 3, 2, 4 sorrendben olvassa ki az elemeket?

Megoldás: Ha ez lehetséges, akkor a preorder bejárás alapján a fa gyökerében van a 6, és mivel ez a legnagyobb elem, minden más belső csúcs a gyökér bal részfájában található. Ez viszont azt jelenti,

hogy a gyökér jobb gyereke levél, vagyis a gyökér fekete-magassága 1. Ezért ha a gyökér bal gyereke fekete, akkor levél kell hogy legyen, vagyis a fában csak egyetlen elemet tárolunk, ami ellentmondás. Ha ez a gyerek piros, akkor viszont mindkét gyereke levél kell hogy legyen, mert piros csúcs mindkét gyereke fekete, és láttuk, hogy a gyökér fekete-magassága 1. Ezért a fában legfeljebb két elemet tárolunk, ami mindenképpen ellentmondás, így a válasz nem.

10. Adott egy n csúcsú bináris keresőfa, melyben csupa különböző elemeket tárolunk. Ennek minden v csúcsára meg akarjuk határozni, hogy a v gyökerű részében hány darab v -nél kisebb elem van tárolva. Adjon algoritmust, ami ezt a feladatot $O(n)$ lépésben megoldja!

Megoldás: Egy keresőfa v gyökerű részében v -nél kisebb elemek csak a v bal részében lehetnek, a feladatunk minden csúcsra a bal részfa méretének meghatározása. Helyette dinamikus programozással határozzuk meg minden v csúcsra a bal részfa $B[v]$ és a jobb részfa $J[v]$ méretét is! Posztorder sorrendben menjünk végig a csúcsokon. Ha v levél, akkor $B[v] = J[v] = 0$. Ha v nem levél és x a bal, y a jobb gyereke, akkor $B[v] = B[x] + J[x] + 1$ és $J[v] = B[y] + J[y] + 1$. Amennyiben x vagy y nem létezik, akkor $B[v]$ vagy $J[v]$ értéke 0.

Végül a $B[v]$ értékekre van szükségünk.

A lépésszám: a bejárás lineáris, minden csúcsnál konstans sok további műveletet végzünk, ezért összesen $O(n)$.

11. Az $[1, 178]$ intervallumba eső összes egész számot egy 2-3-fában tároljuk. Tudjuk, hogy a gyökérben két útjelző van, és az első ezekből a 17. Mi lehet a második?

Megoldás: A második útjelző a jobb oldali részében tárolt legkisebb szám, tehát ezt kell meghatároznunk.

Az első útjelző miatt a bal részfa 1-től 16-ig tárolja a számokat. Ezért ennek a részfának a magassága legalább 4 és legfeljebb 5. Mivel két útjelzőnk van, a gyökérnek 3 gyereke van. Tudjuk, hogy mindhárom részfa magassága ugyanaz. Ha ez a közös magasság 4, akkor a középső és jobb részében is legfeljebb $3^{4-1} = 3^3 = 27$ levél van, tehát legfeljebb ennyi értéket tárolhat, így nem fér a fába mind a 178 elem. Tehát a bal részfa, és így a másik kettő magassága is 5 kell legyen. Ekkor a másik két részfa mindegyike legfeljebb $3^{5-1} = 3^4 = 81$ értéket tárolhat. Mivel $16 + 2 \cdot 81 = 178$, ezért csak az lehet, hogy a középső és jobb részében minden nem levél csúcsnak 3 gyereke van (a bal részében meg mindenhol 2), a középső és jobb részfa is 81 elemet tárol.

A gyökérben levő második útjelző a jobb részfa legkisebb eleme, ami ezek szerint $16 + 81 + 1 = 98$.

12. Egy 2-3-fában 4 elem van. Egyértelmű-e a 2-3-fa?

Megoldás: A szintek száma $\log_3 4 + 1 = 2,2618\dots$ és $\log_2 4 + 1 = 3$ között van, tehát pont 3. A három szintű fának pont 4 levele van, ha minden csúcsnak pont 2 gyereke van. Ha bármelyiknek 3 gyereke lenne, már legalább 5 levél lenne. Tehát a fa egy teljes bináris fa, ami egyértelmű. Mivel azt is tudjuk, hogy az elemek a levelekben balról jobbra növekednek, valamint a belső csúcsok címkéi is egyértelműen meghatározhatóak a levelekből, ezért a 2-3-fa egyértelmű.