Algoritmuselmélet pótzárthelyi
2012. április 25.

A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét, NEPTUN kódját**, a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Ezen kívül a legfelső lapra írja rá **gyakorlatvezetője nevét** is (akihez a NEPTUN szerint jár). Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-31 pont: 1, 32-43 pont: 2, 44-55 pont: 3, 56-67 pont: 4, 68-80 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a (legalább elégséges) zh pontszámát vesszük figyelembe.
Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.
Az eredményeket a gyakorlatvezetőtől lehet majd megtudni.

1. Tudjuk, hogy az $f(n), g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényekre igaz, hogy $f(n) = O(g(n))$, de $f(n) \neq \Theta(g(n))$. Lehetséges-e, hogy $f(n) + 2012 \cdot n^{\log n} = \Theta(n \cdot \log n + g(n))$?

2. Egy n-szer n-es táblázat minden kockájába egy (nem feltétlenül pozitív) egész szám van írva vagy rózsaszínnel vagy sárgával. Sétát szeretnénk tenni a táblázatban a következő feltételekkel: a séta bárhol indulhat és bárhol végződhet, egy lépésben vagy balra vagy felfelé léphetünk egy mezőt, de csak akkor ha közben színt is váltunk. Egy ilyen séta értéke a közben érintett mezőkön levő számok összege (a végponti mezők is számítanak). A séta állhat egy mezőből is, azaz végződhet ott, ahol kezdődik. Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben meghatározza a táblázatban található legértékesebb séta hosszát.

3. Űrhajónkkal egy véges, egydimenziós univerzumban ragadtunk, amelynek pontjait 0 és r közötti egész koordinátákkal azonosítjuk. A közlekedést a $0 \leq x_1, x_2, \ldots, x_n \leq r$ koordinátákon elhelyezett *tükörteleportok* segítik: egy-egy tükörteleport aktiválásakor űrhajónk pozíciója tükröződik a teleport pozíciójára, azaz például az y koordinátáról a $2x_i - y$ koordinátára jutunk (vagy megsemmisülünk, ha ezzel kilépnénk az univerzumból). Az s koordinátáról indulva szeretnénk a t koordinátán található – menekülést jelentő – féregjárathoz jutni. Adjon $O(r^2)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza, hogy ehhez legkevesebb hányszor kell teleportálnunk!

4. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{A, B, C, D, E, F\}$, az élek és súlyaik pedig az alábbiak: $s(A, B) = 2$, $s(A, C) = 7$, $s(A, D) = 3$, $s(A, F) = 4$, $s(B, C) = 4$, $s(C, E) = 3$, $s(D, B) = x$, $s(D, E) = 2$, $s(E, F) = 4$, $s(F, C) = 2x$.
Az x nemnegatív valós paraméter függvényében határozza meg az A csúcsból a többi csúcsba vett legrövidebb utak hosszát a Dijkstra algoritmussal !

5. Egy n-szer n-es táblázatban az $1, 2, \ldots, n^2$ egész számok vannak valamilyen sorrendben (az n^2 szám mindegyike pontosan egyszer szerepel). Szeretnénk ezeket a számokat rendbe rakni, úgy, hogy az i. sorban $((i-1)n+1)$-től in-ig legyenek növekvően a számok, minden $1 \leq i \leq n$ esetén. A számokat csak egyféleképpen tudjuk mozgatni: két (nem feltétlenül szomszédos) elemet felcserélhetünk.
(a) Adjon $O(n^2)$ cserét használó algoritmust a feladat megoldására! (A cserén kívül bármi mást korlátlanul szabad csinálnunk.)
(b) Létezik-e olyan algoritmus, ami $O(n \log n)$ cserével megoldja a feladatot?

6. Egy kezdetben üres bináris keresőfába szúrja be az alábbi számokat az alábbi sorrendben: $7, 72, 12, 27, 10, 4, 6, 5$, majd törölje ki a 7-t, aztán pedig a 72-t.
Minden lépés után adja meg az aktuális állapotot.

7. Egy kupac elemeit inorder bejárás szerint kiolvasva a $13, 12, 31, 10, 14, 4, 23, 18, 51$ sorozatot kapjuk. Rajzolja fel a kupacot!

8. Mekkora lehet egy olyan piros-fekete fa magassága, amiben 7 elemet tárolunk?