# Algoritmuselmélet

## 2-3 fák

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem



## 2-3-fák

Ez is fa, de a binárisnál bonyolultabb: egy nem-levél csúcsnak 2 vagy 3 fia lehet.

A **2-3-fa** egy (lefelé) irányított gyökeres fa, melyre:

- A rekordok a fa leveleiben helyezkednek el, a kulcs értéke szerint balról jobbra növekvő sorrendben. Egy levél egy rekordot tartalmaz.
- Minden belső (azaz nem levél) csúcsból 2 vagy 3 él megy lefelé; ennek megfelelően a belső csúcsok egy, illetve két $s \in U$ kulcsot tartalmaznak. A belső csúcsok szerkezete tehát kétféle lehet. Az egyik típus így ábrázolható:

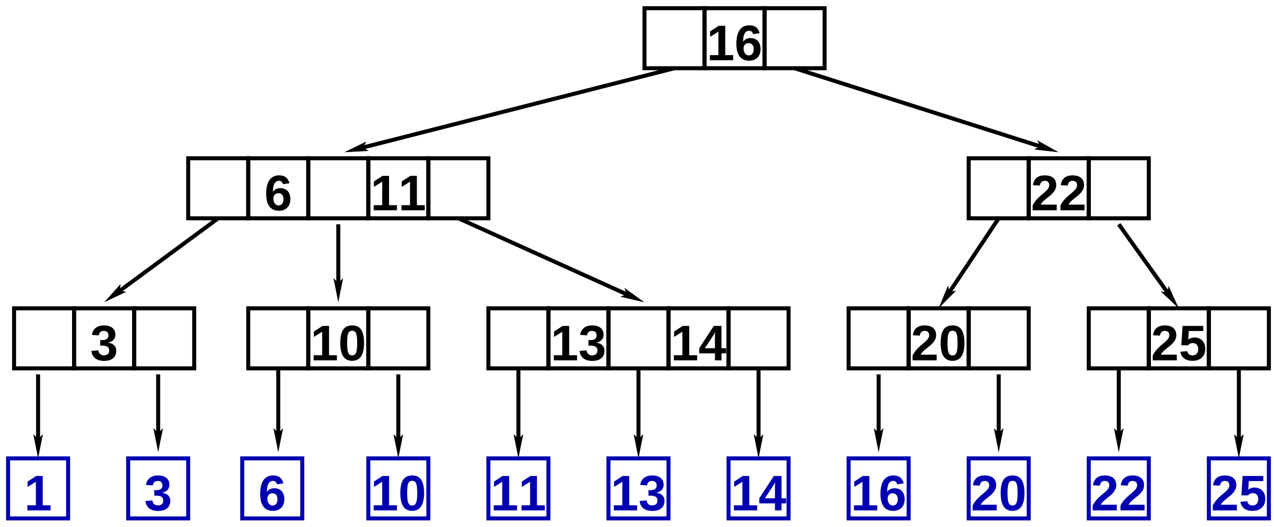
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $m_1$ | $s_1$ | $m_2$ | $s_2$ | $m_3$ |

  Itt $m_1, m_2, m_3$ mutatók a csúcs részfáira, $s_1$, $s_2$ pedig $U$-beli kulcsok, melyekre $s_1 < s_2$. Az $m_1$ által mutatott részfa minden kulcsa kisebb, mint $s_1$, az $m_2$ részfájában $s_1$ a legkisebb kulcs, és minden kulcs kisebb, mint $s_2$. Végül $m_3$ részfájában $s_2$ a legkisebb kulcs. A másik típusú csúcsoknál az az utolsó két mező hiányzik:

| | | |
|---|---|---|
| $m_1$ | $s_1$ | $m_2$ |

- A fa levelei a gyökértől egyforma távolságra vannak.

# Példa 2-3-fára






# 2-3-fa tulajdonságai

**Tétel**

*Ha a fának $m$ szintje van, akkor a levelek száma legalább $2^{m-1}$. Megfordítva, ha $|S| = n$ (itt $S \subseteq U$ a fában tárolt kulcsok halmaza; $|S|$ megegyezik a tárolt rekordok számával), akkor $m \leq \log_2 n + 1$.*

**Bizonyítás.**

Minden belső csúcsnak legalább 2 fia van $\Longrightarrow$
az $i$-edik szinten legalább $2^{i-1}$ csúcs van ($1 \leq i \leq m$). $\Longrightarrow$
$2^{m-1} \leq n \Longrightarrow m - 1 \leq \log_2 n$. $\surd$ $\square$

# 2-3-fa tulajdonságai

**Tétel**

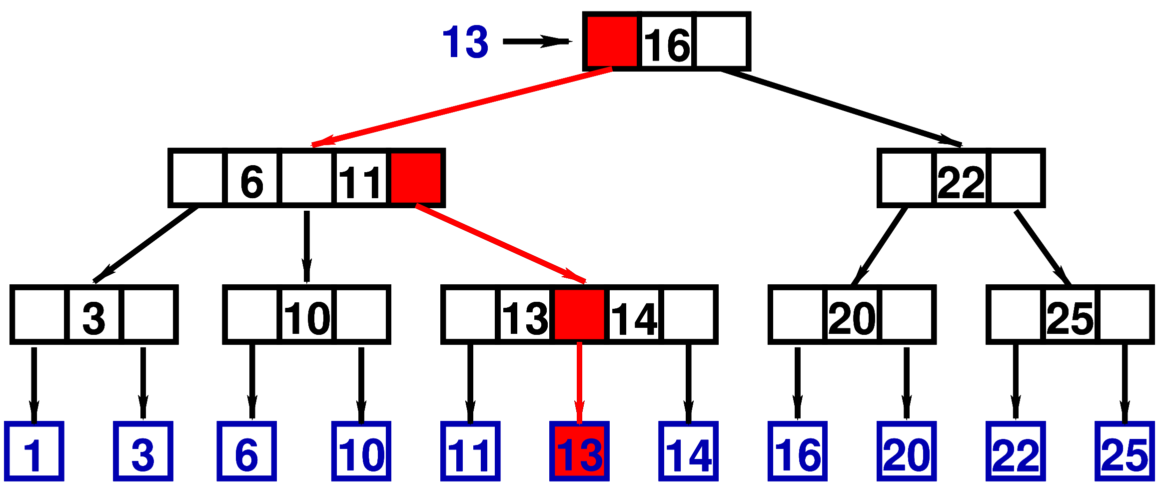
*Ha a fának $m$ szintje van, akkor a levelek száma legfeljebb $3^{m-1}$. Megfordítva, $m \geq \log_3 n + 1$.*

**Bizonyítás.**

Minden belső csúcsnak legfeljebb 3 fia van $\implies$
az $i$-edik szinten legfeljebb $3^{i-1}$ csúcs van ($1 \leq i \leq m$). $\implies$
$n \leq 3^{m-1} \implies m - 1 \geq \log_3 n$. $\surd$ $\square$

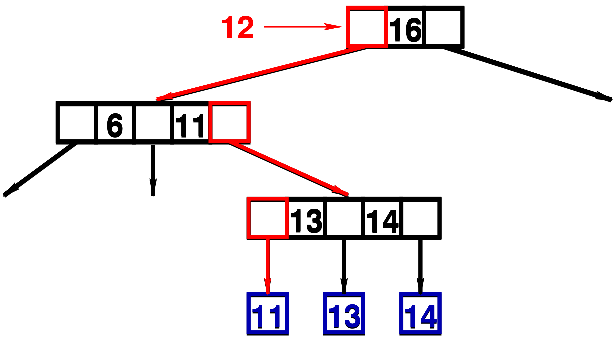


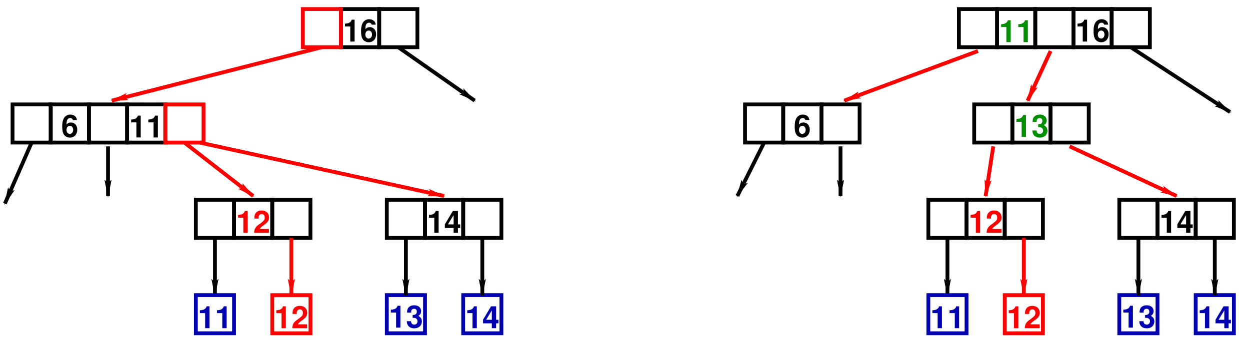
# Keresés 2-3-fában




Hasonló, mint a bináris keresőfában.
Lépésszám: $O(m)$, ahol $\log_3(n) + 1 \leq m \leq \log_2(n) + 1$

# BESZÚR 2-3-fába




Ha a gyökeret is „vágni” kell $\Longrightarrow$ új gyökér, nő a fa magassága.
Lépésszám: $O(m)$, minden szinten legfeljebb 1 „vágás”.



# TÖRÖL 2-3-fából

Legyen $x$ a legalsó belső csúcs a kereső út mentén.

- Ha $x$-nek három fia van $\Longrightarrow$ $\surd$
- Ha $x$-nek csak két fia van:
  - ha $x$ (valamelyik) szomszédos testvérének 3 fia van $\Longrightarrow$ egyet átteszünk $x$ alá;
  - ha $x$ egyik szomszédos testvérének sincs három fia $\Longrightarrow$ „összevonunk” két kettes csúcsot.

Ez is „felgyűrűzhet”. $\Longrightarrow$

Lépésszám: $O(m)$

# *B*-fák

R. Bayer, E. McCreight, 1972

A 2-3-fa általánosítása.

Nagy méretű adatbázisok, külső táron levő adatok feldolgozására használják. Több szabvány tartalmazza valamilyen változatát.

**Probléma**

*Nem az összhasonlítás időigényes, hanem az adatok kiolvasása, de sokszor egy adat kiolvasásához amúgy is kiolvasunk több más adatot, egy lapot.*

$\Longrightarrow$ A fa csúcsai legyenek lapok, a költség a lapelérések száma.



# *B*-fa definíciója

Egy *m-edrendű B-fa*, röviden $B_m$-fa egy gyökeres, (lefelé) irányított fa, melyre érvényesek az alábbiaknak:

a) A gyökér foka legalább 2, kivéve esetleg, ha a fa legfeljebb kétszintes.
b) Minden más belső csúcsnak legalább $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ fia van.
c) A levelek a gyökértől egyforma messze vannak.
d) Egy csúcsnak legfeljebb $m$ fia lehet.
d) A tárolni kívánt rekordok itt is a fa leveleiben vannak; egy levélben a lapmérettől és a rekordhossztól függően több rekord is lehet, növekvően rendezett láncolt listában.

A belső csúcsok hasonlítanak a 2-3-fák belső csúcsaira. Egy belső csúcs így néz ki:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_0$ | $s_1$ | $m_1$ | $s_2$ | $m_2$ | $\ldots$ | $s_i$ | $m_i$ |

# A $B$-fa szintszáma

Tegyük fel, hogy egy $B$-fának $n$ levele és $k$ szintje van, és keressünk összefüggést e két paraméter között.
A kicsi fáktól eltekintve a gyökérnek legalább két fia van, a többi belső csúcsnak pedig legalább $\lceil \frac{m}{2} \rceil$.
$\Longrightarrow n \geq 2\lceil \frac{m}{2} \rceil^{k-2}$, $\Longrightarrow \log_{\lceil \frac{m}{2} \rceil} \frac{n}{2} + 2 \geq k$

$$k \leq \frac{\log_2 n - 1}{\log_2 \lceil \frac{m}{2} \rceil} + 2.$$

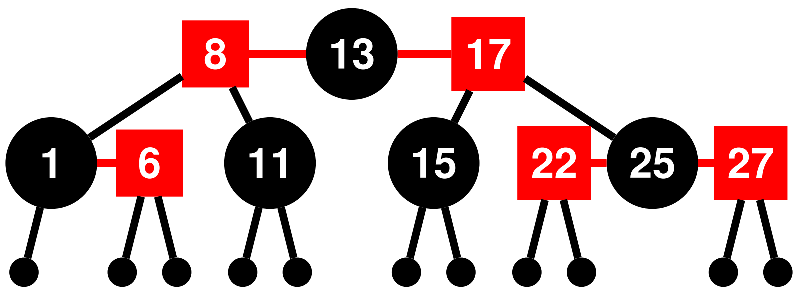
Minden művelet lépésszáma: $\sim \frac{\log_2 n - 1}{\log_2 \lceil \frac{m}{2} \rceil} = \Theta\left(\frac{\log n}{\log m}\right)$, azaz a konstans szorzó kicsi, ha $m$ nagy.
$m$ viszont nem lehet túl nagy, hiszen a belső csúcsoknak egy lapon el kell férniük.

Például: Például, ha $m = 32$, $n = 2^{20}$ (itt $n$ az alsó szint *lapjainak* száma), akkor $k \leq \frac{19}{4} + 2 < 7$. Egy rekord keresése tehát legfeljebb 6 lap elérését igényli.



# A piros-fekete fa és a $B$-fa kapcsolata

A piros-fekete fa olyan $B_4$-fa, aminek a belső csúcsaiban tároljuk az elemeket.




A piros csúcsokat összevonjuk apjukkal, az így összevont csúcsoknak 2, 3 vagy 4 gyereke van.
Ezért a mélység csak a fekete csúcsokkal nő. $\Longrightarrow$ Mivel a fekete magasság állandó, minden levél azonos szinten lesz.

Java animáció: 2-3-fa.