Algoritmuselmélet

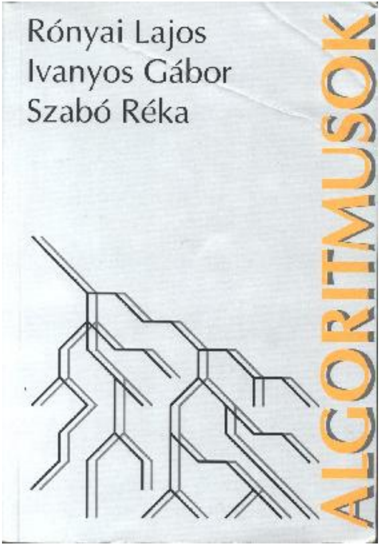
Függvények nagyságrendje, elágazás és korlátozás, dinamikus programozás

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

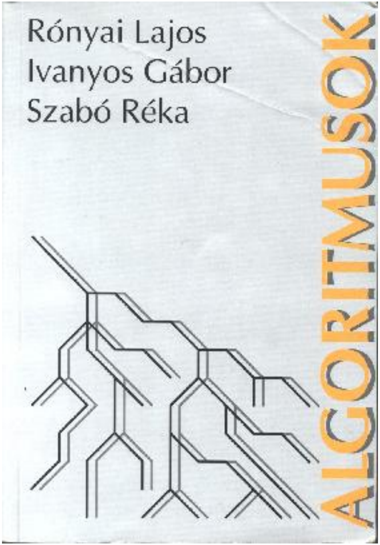
1. előadás

Források



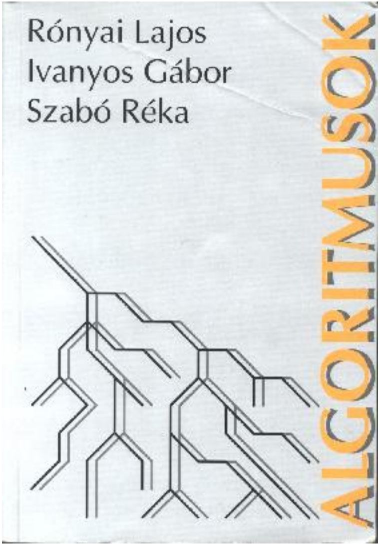
- Rónyai Lajos–Ivanyos Gábor–Szabó Réka: **Algoritmusok**, TYPOTEX, 1999

Források



- Rónyai Lajos–Ivanyos Gábor–Szabó Réka: **Algoritmusok**, TYPOTEX, 1999
- Feladatgyűjtemény: http://www.cs.bme.hu/˜kiskat

Források



- Rónyai Lajos–Ivanyos Gábor–Szabó Réka: **Algoritmusok**, TYPOTEX, 1999
- Feladatgyűjtemény: http://www.cs.bme.hu/˜kiskat
- Egyéb információk, hirdetmények, fóliák ugyanitt.

Követelmények

- ZH: Egy évközi zárthelyi lesz, ezen lehet az aláírást megszerezni. A zh várhatóan 6 feladatból és egy ráadásból áll, mindegyik 10 pontot ér. Az elégségeshez 40%-os teljesítmény (azaz várhatóan minimum 24 pont) kell. A zh eredménye beszámít a végső jegybe. Az aláírásért az évközi zárhelyit legalább elégségesre meg kell írni.
- PótZH: Pótzárthelyi a megadott időpontban lesz, anyaga, szabályai, mint a zh-nál. Ennek eredménye felülírja a zh eredményét. Ha a zh elérte az elégséges szintet, de a pótzh nem, akkor az aláírás megmarad, de a pontszám az aláíráshoz szükséges minimumra (40%) csökken.
  A pótlási héten lesz még egy alkalom kizárólag azoknak, akik még nem szerezték meg az aláírást (anyaga ugyanaz, mint a zh anyaga).

Követelmények

- Vizsga: A vizsga is ugyanannyi feladatból áll, mint a zh, de természetesen az egész anyagból. Ha ezen nem sikerül elérni 40%-ot, a jegy elégtelen. Amennyiben legalább elégséges az eredmény, akkor a vizsgadolgozatot 60, a zh (illetve pótzh vagy pótpótzh) eredményét 40% súllyal számítjuk be a vizsgajegybe. Az így kapott legalább elégséges jegyen az eredményhirdetéskor lehetőség van szóbeli vizsgával egy jegyet módosítani (fel vagy le).

Algoritmus fogalma

- Egyelőre nem definiáljuk rendesen az algoritmus fogalmát.

Algoritmus fogalma

- Egyelőre nem definiáljuk rendesen az algoritmus fogalmát.
- Eljárás, recept, módszer.

Algoritmus fogalma

- Egyelőre nem definiáljuk rendesen az algoritmus fogalmát.
- Eljárás, recept, módszer.
- Jól meghatározott lépések egymásutánja, amelyek már elég pontosan, egyértelműen megfogalmazottak ahhoz, hogy gépiesen végrehajthatók legyenek.

A szó eredete

Al Khvarizmi (Mohamed ibn Músza) bagdadi matematikus a IX. században könyvet írt az egészekkel való alapműveletek végzéséről.

A szó eredete

Al Khvarizmi (Mohamed ibn Músza) bagdadi matematikus a IX. században könyvet írt az egészekkel való alapműveletek végzéséről.

$$\text{algoritmus} \leftrightarrow \text{számítógép program}$$

A szó eredete

Al Khvarizmi (Mohamed ibn Músza) bagdadi matematikus a IX. században könyvet írt az egészekkel való alapműveletek végzéséről.

algoritmus $\leftrightarrow$ számítógép program

valós probléma

A szó eredete

Al Khvarizmi (Mohamed ibn Músza) bagdadi matematikus a IX. században könyvet írt az egészekkel való alapműveletek végzéséről.

$$\text{algoritmus} \leftrightarrow \text{számítógép program}$$

valós probléma $\Longrightarrow$ absztrakt modell

A szó eredete

Al Khvarizmi (Mohamed ibn Músza) bagdadi matematikus a IX. században könyvet írt az egészekkel való alapműveletek végzéséről.

$$\text{algoritmus} \leftrightarrow \text{számítógép program}$$

valós probléma $\Longrightarrow$ absztrakt modell $\Longrightarrow$ algoritmus

A szó eredete

Al Khvarizmi (Mohamed ibn Músza) bagdadi matematikus a IX. században könyvet írt az egészekkel való alapműveletek végzéséről.

$$\text{algoritmus} \leftrightarrow \text{számítógép program}$$

valós probléma $\Longrightarrow$ absztrakt modell $\Longrightarrow$ algoritmus $\Longrightarrow$ program

Cél: feladatokra hatékony eljárás kidolgozása

A szó eredete

Al Khvarizmi (Mohamed ibn Músza) bagdadi matematikus a IX. században könyvet írt az egészekkel való alapműveletek végzéséről.

$$\text{algoritmus} \leftrightarrow \text{számítógép program}$$

$$\text{valós probléma} \implies \text{absztrakt modell} \implies \text{algoritmus} \implies \text{program}$$

Cél: feladatokra hatékony eljárás kidolgozása

Hatékony $\implies$ gyors, kevés memória, kevés tárhely

Algoritmikus problémák megoldása

$$\boxed{\text{Algoritmikus probléma}} \xrightarrow{\mathcal{A}} \boxed{\text{modell}} \xrightarrow{\mathcal{B}} \boxed{\text{program}}$$

Algoritmikus problémák megoldása

$$\boxed{\text{Algoritmikus probléma}} \xrightarrow{\mathcal{A}} \boxed{\text{modell}} \xrightarrow{\mathcal{B}} \boxed{\text{program}}$$

$\mathcal{A}$: pontosítás, egyszerűsítés, absztrakció, lényegtelen elemek kiszűrése, a lényeg kihámozása

Algoritmikus problémák megoldása

$$\boxed{\text{Algoritmikus probléma}} \xrightarrow{\mathcal{A}} \boxed{\text{modell}} \xrightarrow{\mathcal{B}} \boxed{\text{program}}$$

$\mathcal{A}$: pontosítás, egyszerűsítés, absztrakció, lényegtelen elemek kiszűrése, a lényeg kihámozása

Modell: sokféle lehet, elég tág, de elég egyszerű, formalizált, pontos

Algoritmikus problémák megoldása

$$\boxed{\text{Algoritmikus probléma}} \xrightarrow{\mathcal{A}} \boxed{\text{modell}} \xrightarrow{\mathcal{B}} \boxed{\text{program}}$$

$\mathcal{A}$: pontosítás, egyszerűsítés, absztrakció, lényegtelen elemek kiszűrése, a lényeg kihámozása

Modell: sokféle lehet, elég tág, de elég egyszerű, formalizált, pontos

$\mathcal{B}$: hatékony algoritmus, bemenő adatok $\rightarrow$ eredmény, érdemes foglalkozni a kapott algoritmus *elemzésével, értékelésével*, megvizsgálva, hogy a módszer mennyire hatékony

Példa: Buborék-rendezés leírása

Input: $A[1:n]$ (rendezetlen) tömb
Ha valamely i-re $A[i] > A[i+1]$, akkor a két cella tartalmát kicseréljük.
A tömb elejéről indulva, közben cserélgetve eljutunk a tömb végéig.

Példa: Buborék-rendezés leírása

Input: $A[1:n]$ (rendezetlen) tömb
Ha valamely i-re $A[i] > A[i+1]$, akkor a két cella tartalmát kicseréljük.
A tömb elejéről indulva, közben cserélgetve eljutunk a tömb végéig.
Ekkor a legnagyobb elem $A[n]$-ben van.

Példa: Buborék-rendezés leírása

Input: $A[1:n]$ (rendezetlen) tömb
Ha valamely i-re $A[i] > A[i+1]$, akkor a két cella tartalmát kicseréljük.
A tömb elejéről indulva, közben cserélgetve eljutunk a tömb végéig.
Ekkor a legnagyobb elem $A[n]$-ben van. Ismételjük ezt az $A[1:n-1]$ tömbre, majd az $A[1:n-2]$ tömbre, stb.

Példa: Buborék-rendezés leírása

Input: $A[1:n]$ (rendezetlen) tömb
Ha valamely i-re $A[i] > A[i+1]$, akkor a két cella tartalmát kicseréljük.
A tömb elejéről indulva, közben cserélgetve eljutunk a tömb végéig.
Ekkor a legnagyobb elem $A[n]$-ben van. Ismételjük ezt az $A[1:n-1]$ tömbre, majd az $A[1:n-2]$ tömbre, stb.

Példa: Buborék-rendezés pszeudokódja

procedure buborék
(az $A[1:n]$ tömböt növekvően (nem csökkenően) rendezi *)*
for $(j = n-1, j > 0, j := j-1)$ **do**
    for $(i = 1, i \leq j, i := i+1)$ **do**
        $\{$ ha $A[i+1] < A[i]$, akkor cseréljük ki őket.$\}$

Példa: Buborék-rendezés helyessége

Állítás

A külső ciklus egy-egy iterációja után, a belső ciklus lefutása után az $A[j+1:n]$ tömb már rendezett és az $A[j+1:n]$ tömb egyik eleme sem kisebb az $A[1:j]$ tömb egyik eleménél sem.

Példa: Buborék-rendezés helyessége

Állítás

A külső ciklus egy-egy iterációja után, a belső ciklus lefutása után az $A[j+1:n]$ tömb már rendezett és az $A[j+1:n]$ tömb egyik eleme sem kisebb az $A[1:j]$ tömb egyik eleménél sem.

Bizonyítás.

Indukcióval. Az elején nyilván OK.
A belső ciklus az $A[1:j]$ legnagyobb elemét teszi az $A[j+1]$ helyre, ez nem nagyobb, mint $A[j+1:n]$ többi eleme és nem kisebb, mint $A[1:j]$ többi eleme.

Példa: Buborék-rendezés helyessége

Állítás

A külső ciklus egy-egy iterációja után, a belső ciklus lefutása után az $A[j+1:n]$ tömb már rendezett és az $A[j+1:n]$ tömb egyik eleme sem kisebb az $A[1:j]$ tömb egyik eleménél sem.

Bizonyítás.

Indukcióval. Az elején nyilván OK.
A belső ciklus az $A[1:j]$ legnagyobb elemét teszi az $A[j+1]$ helyre, ez nem nagyobb, mint $A[j+1:n]$ többi eleme és nem kisebb, mint $A[1:j]$ többi eleme. $\square$

Állítás

Ha $j=1$, akkor rendezett lesz a tömb az előző állítás miatt.

Példa: Buborék-rendezés hatékonysága

összehasonlítások száma: $n-1+n-2+\ldots+1=\frac{n(n-1)}{2}$

cserék száma: $\leq \frac{n(n-1)}{2}$

Példa: Buborék-rendezés hatékonysága

összehasonlítások száma: $n-1+n-2+\ldots+1=\frac{n(n-1)}{2}$

cserék száma: $\leq \frac{n(n-1)}{2}$

Java animáció: Buborék rendezés
Video animáció: Buborék rendezés
Video tánc: Buborék rendezés
Java animáció: Buborék rendezés

Milyen hatékony egy algoritmus?

- Legtöbbször csak a lépésszám nagyságrendje érdekes.
  Hogyan függ a lépésszám az input méretétől?

Milyen hatékony egy algoritmus?

- Legtöbbször csak a lépésszám nagyságrendje érdekes. Hogyan függ a lépésszám az input méretétől?
- Az input méretét legtöbbször n-nel jelöljük.

Milyen hatékony egy algoritmus?

- Legtöbbször csak a lépésszám nagyságrendje érdekes. Hogyan függ a lépésszám az input méretétől?
- Az input méretét legtöbbször n-nel jelöljük.
- A lépésszám ennek egy f függvénye, azaz ha n méretű az input, akkor az algoritmus $f(n)$ lépést végez.

Milyen hatékony egy algoritmus?

- Legtöbbször csak a lépésszám nagyságrendje érdekes.
  Hogyan függ a lépésszám az input méretétől?
- Az input méretét legtöbbször n-nel jelöljük.
- A lépésszám ennek egy f függvénye, azaz ha n méretű az input, akkor az algoritmus $f(n)$ lépést végez.
- Igazából az f függvény az érdekes.

Milyen hatékony egy algoritmus?

- Legtöbbször csak a lépésszám nagyságrendje érdekes.
  Hogyan függ a lépésszám az input méretétől?
- Az input méretét legtöbbször n-nel jelöljük.
- A lépésszám ennek egy f függvénye, azaz ha n méretű az input, akkor az algoritmus $f(n)$ lépést végez.
- Igazából az f függvény az érdekes.
- $100n$ vagy $101n$, általában mindegy

Milyen hatékony egy algoritmus?

- Legtöbbször csak a lépésszám nagyságrendje érdekes. Hogyan függ a lépésszám az input méretétől?
- Az input méretét legtöbbször n-nel jelöljük.
- A lépésszám ennek egy f függvénye, azaz ha n méretű az input, akkor az algoritmus $f(n)$ lépést végez.
- Igazából az f függvény az érdekes.
- $100n$ vagy $101n$, általában mindegy
- n^2 vagy n^3 már sokszor nagy különbség, de néha mindegy

Milyen hatékony egy algoritmus?

- Legtöbbször csak a lépésszám nagyságrendje érdekes. Hogyan függ a lépésszám az input méretétől?
- Az input méretét legtöbbször n-nel jelöljük.
- A lépésszám ennek egy f függvénye, azaz ha n méretű az input, akkor az algoritmus $f(n)$ lépést végez.
- Igazából az f függvény az érdekes.
- $100n$ vagy $101n$, általában mindegy
- n^2 vagy n^3 már sokszor nagy különbség, de néha mindegy
- n^2 vagy 2^n már mindig nagy különbség

Például

Kérdés

Egy 10^{10} művelet/mp sebességű számítógép mennyi ideig dolgozik, ha $f(n)$ műveletet kell végrehajtani n méretű bemenetre?

n	$f(n)$ n	n^2	$\log_{10} n$	2^n	$n!$
10	10^{-9}	10^{-8}	10^{-10}	$1{,}02 \cdot 10^{-7}$	$3{,}6 \cdot 10^{-4}$
10^2	10^{-8}	10^{-6}	$2 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{12}$ év	$2{,}9 \cdot 10^{140}$ év
10^6	10^{-4}	100	$6 \cdot 10^{-10}$	$3{,}1 \cdot 10^{301.012}$ év	$2{,}6 \cdot 10^{5.565.691}$ év
10^9	$0{,}1$	$3{,}1$ év	$9 \cdot 10^{-9}$	sok év	sok év

Függvények nagyságrendje

Definíció

Ha $f(n)$ és $g(n)$ az $\mathbb{R}^+$ egy részhalmazán értelmezett, valós értékeket felvevő függvények, akkor $f = O(g)$ jelöli azt a tényt, hogy vannak olyan $c, n_0 > 0$ állandók, hogy $|f(n)| \leq c|g(n)|$ teljesül, ha $n \geq n_0$.

Példák

- $100n + 300 = O(n)$
  Biz: $100n + 300 \leq 100n + n \leq 101n \leq cn$, ha $n \geq 300,\ c = 101$

Példák

- $100n + 300 = O(n)$
  Biz: $100n + 300 \leq 100n + n \leq 101n \leq cn$, ha $n \geq 300$, $c = 101$
- $5n^2 + 3n = O(n^2)$
  Biz: $5n^2 + 3n \leq 5n^2 + 3n^2 \leq 8n^2 \leq cn^2$, ha $n \geq 100$, $c = 8$

Példák

- $100n + 300 = O(n)$
  Biz: $100n + 300 \leq 100n + n \leq 101n \leq cn$, ha $n \geq 300,\ c = 101$
- $5n^2 + 3n = O(n^2)$
  Biz: $5n^2 + 3n \leq 5n^2 + 3n^2 \leq 8n^2 \leq cn^2$, ha $n \geq 100,\ c = 8$
- $n^4 + 5n^3 = O(n^5)$
  Biz: $n^4 + 5n^3 \leq 6n^4 \leq n^5 \leq cn^5$, ha $n \geq 6,\ c = 1$

Példák

- $n^{1000} = O(2^n)$
  Biz: Teljes indukcióval, legyen $c = 1$, $n_0 = 10^6$.

Példák

- $n^{1000} = O(2^n)$
  Biz: Teljes indukcióval, legyen $c = 1$, $n_0 = 10^6$.
  $n = 10^6$-re igaz, mert $10^{6000} \leq (2^4)^{6000} \leq 2^{10^6}$.

Példák

- $n^{1000} = O(2^n)$
  Biz: Teljes indukcióval, legyen $c = 1, n_0 = 10^6$.
  $n = 10^6$-re igaz, mert $10^{6000} \leq (2^4)^{6000} \leq 2^{10^6}$.
  Tegyük fel, hogy k-ra igaz.

Példák

- $n^{1000} = O(2^n)$
  Biz: Teljes indukcióval, legyen $c = 1$, $n_0 = 10^6$.
  $n = 10^6$-re igaz, mert $10^{6000} \leq (2^4)^{6000} \leq 2^{10^6}$.
  Tegyük fel, hogy k-ra igaz.
  Felhasználjuk, hogy ha $k \geq 10^6$ akkor
  $\binom{1000}{i} \leq 1000^i = 1000 \cdot 1000^{i-1} \leq 1000^{i-1} \cdot 1000^{i-1} =$
  $= (10^6)^{i-1} \leq k^{i-1}$.

Példák

- $n^{1000} = O(2^n)$
  Biz: Teljes indukcióval, legyen $c = 1, n_0 = 10^6$.
  $n = 10^6$-re igaz, mert $10^{6000} \leq (2^4)^{6000} \leq 2^{10^6}$.
  Tegyük fel, hogy k-ra igaz.
  Felhasználjuk, hogy ha $k \geq 10^6$ akkor
  $\binom{1000}{i} \leq 1000^i = 1000 \cdot 1000^{i-1} \leq 1000^{i-1} \cdot 1000^{i-1} =$
  $= (10^6)^{i-1} \leq k^{i-1}$.
  $(k+1)^{1000} = k^{1000} + \cdots + \binom{1000}{i} k^{1000-i} + \cdots \leq k^{1000} + \cdots +$
  $k^{i-1} k^{1000-i} + \cdots \leq k^{1000} + 1000k^{999} \leq 2 \cdot k^{1000} \leq 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$,
  ha $k \geq 10^6$.

Példák

- $n^{1000} = O(2^n)$
  Biz: Teljes indukcióval, legyen $c = 1, n_0 = 10^6$.
  $n = 10^6$-re igaz, mert $10^{6000} \leq (2^4)^{6000} \leq 2^{10^6}$.
  Tegyük fel, hogy k-ra igaz.
  Felhasználjuk, hogy ha $k \geq 10^6$ akkor
  $\binom{1000}{i} \leq 1000^i = 1000 \cdot 1000^{i-1} \leq 1000^{i-1} \cdot 1000^{i-1} =$
  $= (10^6)^{i-1} \leq k^{i-1}$.
  $(k+1)^{1000} = k^{1000} + \cdots + \binom{1000}{i} k^{1000-i} + \cdots \leq k^{1000} + \cdots +$
  $k^{i-1} k^{1000-i} + \cdots \leq k^{1000} + 1000k^{999} \leq 2 \cdot k^{1000} \leq 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$,
  ha $k \geq 10^6$.
- $\log_2^{1000}(n) = O(n)$

Példák

- $n^{1000} = O(2^n)$
  Biz: Teljes indukcióval, legyen $c = 1, n_0 = 10^6$.
  $n = 10^6$-re igaz, mert $10^{6000} \leq (2^4)^{6000} \leq 2^{10^6}$.
  Tegyük fel, hogy k-ra igaz.
  Felhasználjuk, hogy ha $k \geq 10^6$ akkor
  $\binom{1000}{i} \leq 1000^i = 1000 \cdot 1000^{i-1} \leq 1000^{i-1} \cdot 1000^{i-1} =$
  $= (10^6)^{i-1} \leq k^{i-1}$.
  $(k+1)^{1000} = k^{1000} + \cdots + \binom{1000}{i} k^{1000-i} + \cdots \leq k^{1000} + \cdots +$
  $k^{i-1} k^{1000-i} + \cdots \leq k^{1000} + 1000k^{999} \leq 2 \cdot k^{1000} \leq 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$,
  ha $k \geq 10^6$.
- $\log_2^{1000}(n) = O(n)$
  Biz: Mivel a logaritmus függvény monoton nő, vehetjük a fentiek logaritmusát.

Példák

- $n^{1000} = O(2^n)$
  Biz: Teljes indukcióval, legyen $c = 1, n_0 = 10^6$.
  $n = 10^6$-re igaz, mert $10^{6000} \leq (2^4)^{6000} \leq 2^{10^6}$.
  Tegyük fel, hogy k-ra igaz.
  Felhasználjuk, hogy ha $k \geq 10^6$ akkor
  $\binom{1000}{i} \leq 1000^i = 1000 \cdot 1000^{i-1} \leq 1000^{i-1} \cdot 1000^{i-1} =$
  $= (10^6)^{i-1} \leq k^{i-1}$.
  $(k+1)^{1000} = k^{1000} + \cdots + \binom{1000}{i} k^{1000-i} + \cdots \leq k^{1000} + \cdots +$
  $k^{i-1}k^{1000-i} + \cdots \leq k^{1000} + 1000k^{999} \leq 2 \cdot k^{1000} \leq 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$,
  ha $k \geq 10^6$.
- $\log_2^{1000}(n) = O(n)$
  Biz: Mivel a logaritmus függvény monoton nő, vehetjük a fentiek logaritmusát.
- $2^n = O(n!)$

Példák

- $n^{1000} = O(2^n)$
  Biz: Teljes indukcióval, legyen $c = 1, n_0 = 10^6$.
  $n = 10^6$-re igaz, mert $10^{6000} \leq (2^4)^{6000} \leq 2^{10^6}$.
  Tegyük fel, hogy k-ra igaz.
  Felhasználjuk, hogy ha $k \geq 10^6$ akkor
  $\binom{1000}{i} \leq 1000^i = 1000 \cdot 1000^{i-1} \leq 1000^{i-1} \cdot 1000^{i-1} =$
  $= (10^6)^{i-1} \leq k^{i-1}$.
  $(k+1)^{1000} = k^{1000} + \cdots + \binom{1000}{i} k^{1000-i} + \cdots \leq k^{1000} + \cdots +$
  $k^{i-1}k^{1000-i} + \cdots \leq k^{1000} + 1000k^{999} \leq 2 \cdot k^{1000} \leq 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$,
  ha $k \geq 10^6$.
- $\log_2^{1000}(n) = O(n)$
  Biz: Mivel a logaritmus függvény monoton nő, vehetjük a fentiek logaritmusát.
- $2^n = O(n!)$
- $n! = O(n^n)$

Példák

Igaz-e, hogy $n^2 = O(n)$?

Példák

Igaz-e, hogy $n^2 = O(n)$?

Nem.
Biz: Indirekt, tegyük fel, hogy létezik olyan c, n_0, hogy $n^2 \leq cn$ teljesül minden $n \geq n_0$ esetén.

Példák

Igaz-e, hogy $n^2 = O(n)$?

Nem.

Biz: Indirekt, tegyük fel, hogy létezik olyan c, n_0, hogy $n^2 \leq cn$ teljesül minden $n \geq n_0$ esetén.

Ekkor $n \leq c$ teljesül minden $n \geq n_0$ esetén, ami nyilván nem igaz, ha $n > c$.

Függvények nagyságrendje

Definíció

Ha $f(n)$ és $g(n)$ az $\mathbb{R}^+$ egy részhalmazán értelmezett, valós értékeket felvevő függvények, akkor $f = \Omega(g)$ jelöli azt a tényt, hogy vannak olyan $c, n_0 > 0$ állandók, hogy $|f(n)| \geq c|g(n)|$ teljesül, ha $n \geq n_0$.

Függvények nagyságrendje

Definíció

Ha $f(n)$ és $g(n)$ az $\mathbb{R}^+$ egy részhalmazán értelmezett, valós értékeket felvevő függvények, akkor $f = \Omega(g)$ jelöli azt a tényt, hogy vannak olyan $c, n_0 > 0$ állandók, hogy $|f(n)| \geq c|g(n)|$ teljesül, ha $n \geq n_0$.

Például:

- $100n - 300 = \Omega(n)$, hiszen $n > 300,\ c = 99$-re teljesülnek a feltételek

Függvények nagyságrendje

Definíció

Ha $f(n)$ és $g(n)$ az $\mathbb{R}^+$ egy részhalmazán értelmezett, valós értékeket felvevő függvények, akkor $f = \Omega(g)$ jelöli azt a tényt, hogy vannak olyan $c, n_0 > 0$ állandók, hogy $|f(n)| \geq c|g(n)|$ teljesül, ha $n \geq n_0$.

Például:

- $100n - 300 = \Omega(n)$, hiszen $n > 300, \; c = 99$-re teljesülnek a feltételek
- $5n^2 - 3n = \Omega(n^2)$
- $n^4 - 5n^3 = \Omega(n^4)$
- $2^n = \Omega(n^{1000})$

Függvények nagyságrendje

Definíció

Ha $f = O(g)$ *és* $f = \Omega(g)$ *is teljesül, akkor* $f = \Theta(g)$.

Függvények nagyságrendje

Definíció

Ha $f = O(g)$ és $f = \Omega(g)$ is teljesül, akkor $f = \Theta(g)$.

Például:

- $100n - 300 = \Theta(n)$

Függvények nagyságrendje

Definíció

Ha $f = O(g)$ és $f = \Omega(g)$ is teljesül, akkor $f = \Theta(g)$.

Például:

- $100n - 300 = \Theta(n)$
- $5n^2 - 3n = \Theta(n^2)$
- $n^4 - 5n^3 = \Theta(n^4)$
- $1000 \cdot 2^n = \Theta(2^n)$

Függvények nagyságrendje

Definíció

Legyenek $f(n)$ és $g(n)$ a pozitív egészeken értelmezett, valós értékű függvények. Ekkor az $f = o(g)$ jelöléssel rövidítjük azt, hogy

$$\frac{f(n)}{g(n)} \to 0, \ \textit{ha } n \to \infty.$$

Függvények nagyságrendje

Definíció

Legyenek $f(n)$ és $g(n)$ a pozitív egészeken értelmezett, valós értékű függvények. Ekkor az $f = o(g)$ jelöléssel rövidítjük azt, hogy

$$\frac{f(n)}{g(n)} \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Például:

- $100n + 300 = o(n^2)$, hiszen $\frac{100n+300}{n^2} \to 0$ ha $n \to \infty$

Függvények nagyságrendje

Definíció

Legyenek $f(n)$ és $g(n)$ a pozitív egészeken értelmezett, valós értékű függvények. Ekkor az $f = o(g)$ jelöléssel rövidítjük azt, hogy

$$\frac{f(n)}{g(n)} \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Például:

- $100n + 300 = o(n^2)$, hiszen $\frac{100n+300}{n^2} \to 0$ ha $n \to \infty$
- $5n^2 + 3n = o(n^3)$
- $n^4 + 5n^3 = o(n^4 \log_2 n)$
- $n^{1000} = o(2^n)$