

Algoritmuselmélet

NP-teljes problémák

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

12. előadás

Karp-redukció

Mikor nem lényegesen nehezebb egy Y probléma egy X problémánál?

⇒ Ha Y felhasználásával meg lehet oldani X -et is.

⇒ X visszavezethető a Y problémára.

Definíció

Legyen X és Y két eldöntési probléma. Az X **Karp-redukciója** (polinomiális visszavezetése) az Y problémára egy olyan polinom időben számolható f függvény, amely X minden lehetséges bemenetéhez hozzárendeli Y egy lehetséges bemenetét úgy, hogy

$$x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y.$$

Jelölés: $X \preceq Y$ ha X -nek van Karp-redukciója Y -re.

Ha tehát van algoritmusunk Y eldöntésére $\Rightarrow x \in X$ -re kiszámítjuk $f(x)$ -et eldöntjük $f(x) \in Y$? \Rightarrow tudjuk, hogy $x \in X$ igaz-e ✓

Ha tudnánk, hogy X nehéz és tudjuk, hogy $X \preceq Y$

⇒ Y is nehéz lenne

Ha Y könnyű lenne, és X nem lényegesen nehezebb nála, akkor X is könnyű.

Írányított Hamilton-kör probléma

Tétel

$$IH \preceq H.$$

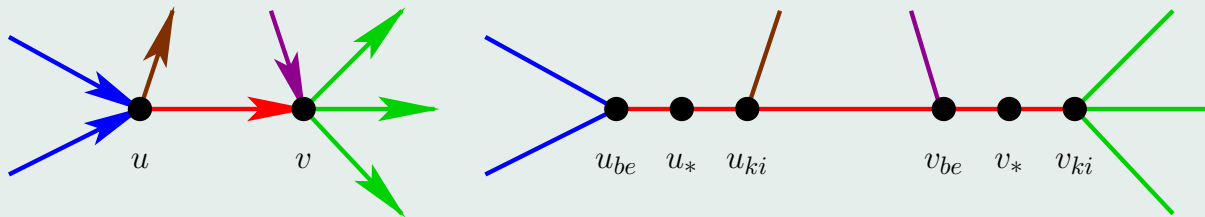
Bizonyítás.

$G = (V, E)$ egy irányított gráf $\rightarrow G' = (V', E')$ irányítatlan gráf
 hogy G' gyorsan megépíthető és

G -ben \exists irányított Hamilton-kör $\leftrightarrow G'$ -ben \exists irányítatlan Hamilton-kör.

$$V' = \{v_{be}, v_*, v_{ki} \mid v \in V\},$$

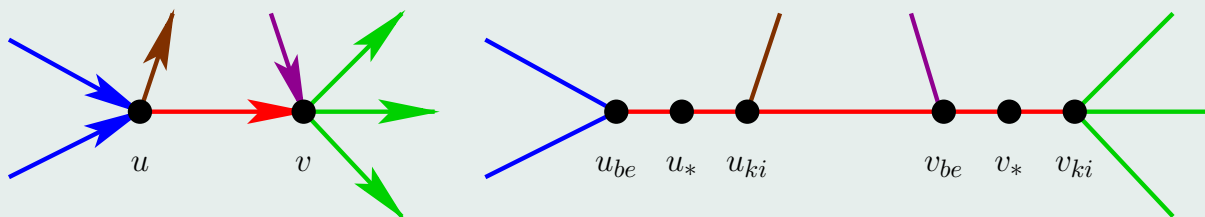
$$E' = \{(v_{be}, v_*), (v_*, v_{ki}) \mid v \in V\} \cup \{(u_{ki}, v_{be}) \mid u \rightarrow v \in E\}.$$



$v(G) = n, e(G) = e \implies v(G') = 3n, e(G') = 2n + e \implies (n + e)^c$
 lépésben megkapható.

Bizonyítás.

G -beli F irányított Hamilton-körének $\implies G'$ egy F' Hamilton-köre



Az F egy $u \rightarrow v$ éle \implies az F' -ben az $u_* - u_{ki} - v_{be} - v_*$ út

$$\implies G \in IH \implies G' \in H$$

Ha G' -ben van egy $F' \subseteq E'$ Hamilton-kör \implies egy u_* -ból indulva egy u_{ki} felé lépünk először

\implies csak $u_* - u_{ki} - v_{be} - v_*$ alakú lehet utána \implies stb. \implies Ha

$G' \in H$ akkor $G \in IH$. □

A Karp-redukció tulajdonságai

Tétel

1. Ha $X \preceq Y$ és $Y \in \mathbf{P}$, akkor $X \in \mathbf{P}$.
2. Ha $X \preceq Y$ és $Y \in \mathbf{NP}$ akkor $X \in \mathbf{NP}$.
3. Ha $X \preceq Y$, akkor $\overline{X} \preceq \overline{Y}$
4. Ha $X \preceq Y$ és $Y \in \mathbf{coNP}$, akkor $X \in \mathbf{coNP}$.
5. Ha $X \preceq Y$ és $Y \in \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$, akkor $X \in \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$.
6. Ha $X \preceq Y$ és $Y \preceq Z$, akkor $X \preceq Z$.

Bizonyítás.

Legyen f az X Karp-redukciója Y -re, ahol f $c_1 n^k$ időben számolható. x egy bemenet, melyről szeretnénk eldönteni, hogy $x \in X$ teljesül-e, n az x hossza.

Bizonyítás.

1.: Kiszámítjuk $f(x)$ -et \implies időigénye $\leq c_1 n^k \implies |f(x)| \leq c_1 n^k$
 Y felismerő algoritmusával $c_2 |f(x)|^l$ időben eldöntjük, hogy $f(x) \in Y$ igaz-e

\implies időigénye $\leq c_2 (c_1 n^k)^l$
 $x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y \implies$ összi idő $O(n^{kl})$ ✓

2.: Az $f(x) \in Y$ tény egy t tanúja jó $x \in X$ tanújának is, és az Y -hoz tartozó \mathcal{T} tanusító algoritmus egy **kis módosítással** jó lesz az X tanusító algoritmusának is

\mathcal{T}' az (x, t) bemenetre először kiszámítja $f(x)$ -et, majd az $(f(x), t)$ párra alkalmazza \mathcal{T} -t.

Ha az eredmény **IGEN**, akkor legyen \mathcal{T}' eredménye is **IGEN**, különben pedig **NEM**.

$|t| \leq |f(x)|^c \implies |t| \leq O(n^{kc})$

\mathcal{T}' lépésszáma, ha \mathcal{T} lépésszáma $O(m^l)$: $O(n^k) + O((n^{kc})^l) = O(n^{kcl})$

Bizonyítás.

3.: Mint 1., hiszen x bemenetre $x \notin X \Leftrightarrow f(x) \notin Y$.

4.: \Leftarrow 2.,3.

5.: \Leftarrow 2.,4.

6.: Legyen f az $X \prec Y$ függvénye, ami $O(x^k)$ időben számolható és g az $Y \prec Z$ függvénye, ami $O(x^l)$ időben számolható.

Az $X \prec Z$ függvénye $g(f(x))$ lesz, ami $O((x^k)^l) = O(x^{kl})$ időben számolható. □

NP-teljes problémák

Definíció

Az X eldöntési probléma **NP-nehéz**, ha tetszőleges (azaz minden) $X' \in \text{NP}$ probléma esetén létezik $X' \prec X$ Karp-redukció.

Az X eldöntési probléma **NP-teljes**, ha $X \in \text{NP}$ és X NP-nehéz.

Egy NP-teljes probléma tehát legalább olyan nehéz, mint bármely más NP-beli probléma.

Ha egy ilyen problémáról kiderülne, hogy P-beli (coNP-beli), akkor ugyanez igaz lenne minden NP-beli problémára.

Van-e NP-teljes probléma?

Boole-formulák

Definíció

Az $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ függvényeket n -változós **Boole-függvényeknek** vagy **Boole-formuláknak** hívjuk.

Tétel

Minden Boole-függvény felírható az x_1, \dots, x_n Boole-változók, az \wedge, \vee, \neg logikai műveletek és zárójelek segítségével.

Pl. Boole-formula:

$$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_5) \wedge ((\neg x_3 \vee x_2 \vee (x_6 \wedge x_1)) \wedge \neg(x_5 \vee x_6))$$

Boole-formulák

Definíció

Egy Boole-formula kielégíthető, ha lehet úgy értékeket adni a változónak, hogy a függvény értéke 1 legyen.

Pl. $\Phi(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$ kielégíthető, mert ha $x_1 = 1$ és $x_2 = 0$, akkor $\Phi(x_1, x_2) = 1$

De pl. $(x_1 \wedge \neg x_1)$ nyilván nem kielégíthető.

Van-e NP-teljes probléma?

Definíció

SAT probléma:

Bemenet: Φ Boole-fomula

Kérdés: Kielégíthető-e Φ ?

Tétel (S. A. Cook, L. Levin, 1971)

A SAT probléma NP-teljes.

Bizonyítás elég bonyolult.

További NP-teljes feladatok

Tétel

Ha az X probléma NP-teljes, $Y \in \text{NP}$ és $X \preceq Y$, akkor Y is NP-teljes.

Bizonyítás.

Láttuk, hogy a Karp-redukció tranzitív.

\implies Ha $X \preceq Y$ és $Z \preceq X$ teljesül $\forall Z \in \text{NP-teljes problémára}$

$\implies Z \preceq Y$ teljesül $\forall Z \in \text{NP-teljes problémára}$ □

Nem kell már minden NP-beli problémát az Y -re redukálni; elég ezt megtenni egyetlen NP-teljes X problémával.

A 3-SZÍN probléma

Tétel

A 3SZÍN probléma NP-teljes.

Bizonyítás.

Már láttuk, hogy \in NP, belátható, hogy $\text{SAT} \prec 3\text{SZÍN}$.

Maximális méretű független pontrendszer gráfokban

MAXFTLEN

Bemenet: G gráf, $k \in \mathbb{Z}^+$

Kérdés: Van-e G -nek k elemű független csúcshalmaza?

Tétel

A MAXFTLN nyelv NP-teljes.

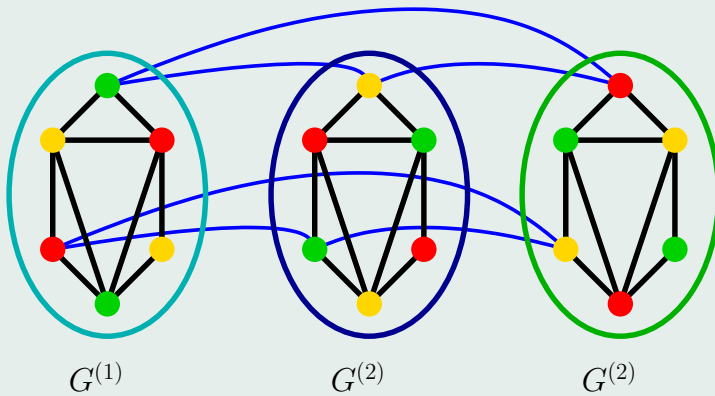
Bizonyítás.

MAXFTLEN \in NP: tanú egy k -elemű $S \subseteq V(G)$ független csúcshalmaz. ✓

Megadunk egy 3SZÍN \prec MAXFTLEN Karp-redukciót, $G \rightarrow (G', |V(G)|)$

$$G \in 3\text{SZÍN} \Leftrightarrow (G', |V(G)|) \in \text{MAXFTLEN}$$

Bizonyítás.



$$\begin{aligned} |V(G')| &= 3|V(G)| \text{ és} \\ |E(G')| &= 3|V(G)| + 3|E(G)|, \\ \text{legyen } k &= |V(G)|. \end{aligned}$$

Ha G színezhető 3 színnel $\implies G'$ is \implies

a piros pontok halmaza G' -ben független és $|V(G)|$ van belőlük. ✓

Ha G' -ben van $|V(G)|$ független \implies legyen egy pont színe olyan, hogy melyik $G^{(i)}$ -ben van. ✓ □

Maximális méretű klikk

MAXKLIKK

Bemenet: G gráf, $k \in \mathbb{Z}^+$

Kérdés: Van-e G -ben k pontú teljes részgráf (k -klikk)?

Tétel

A MAXKLIKK nyelv NP-teljes.

Bizonyítás.

MAXKLIKK \in NP: tanú egy k -elemű $S \subseteq V(G)$ teljes részgráf. ✓

Megadunk egy MAXFTLEN \prec MAXKLIKK Karp-redukciót:

$f(G, k) = (\bar{G}, k)$ (független ponthalmaz a komplementerben teljes gráf) ✓ □

Részgráf izomorfia probléma

RÉSZGÁFIZO

Bemenet: G, H gráfok

Kérdés: Van-e G -ben H -val izomorf részgráf?

Tétel

A RÉSZGÁFIZO nyelv NP-teljes.

Bizonyítás.

RÉSZGÁFIZO \in NP: tanú egy részgráf és annak izomorfiaja H -val ✓

Megadunk egy MAXKLIKK \prec RÉSZGÁFIZO Karp-redukciót:

$f(G, k) = (G, K_k)$ ✓

□

Ha X NP-nehéz és Y általánosítása X -nek, akkor Y is NP-nehéz.

\implies RÉSZGÁFIZO speciális esete a MAXKLIKK-nek \implies NP-teljes.

Hamilton-kör probléma

Tétel

A H nyelv NP-teljes.

Bizonyítás.

Már láttuk, hogy $H \in$ NP ✓

Belátható, hogy SAT \prec H (bonyolult)

Hamilton-út probléma

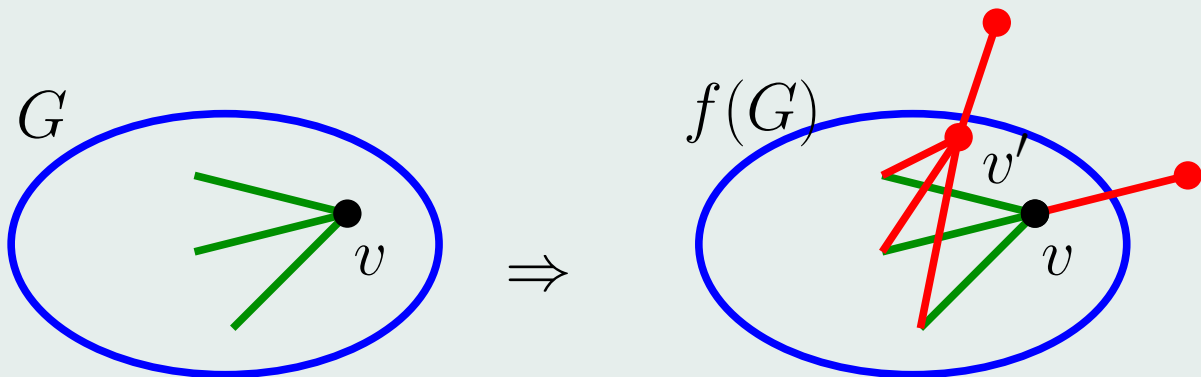
Tétel

Az H-ÚT nyelv NP-teljes.

Bizonyítás.

H-ÚT \in NP, mert egy Hamilton-út tanú \checkmark

Belátjuk, hogy $H \prec$ H-ÚT



G -ben akkor és csak akkor van Hamilton-kör, ha $f(G)$ -ben van Hamilton-út.

□

A Hátizsák feladat

Hátizsák feladat:

Adottak tárgyak $s_1, \dots, s_m > 0$ súlyai, ezek $v_1, \dots, v_m > 0$ értékei, valamint a b megengedett maximális összsúly.

Tegyük fel, hogy az s_i, v_i, b számok egészek.

A feladat az, hogy találjunk egy olyan $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ részhalmazt, melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$, és ugyanakkor $\sum_{i \in I} v_i$ a lehető legnagyobb.

\Rightarrow

HÁT

Bemenet: $s_1, \dots, s_m; v_1, \dots, v_m; b; k$

Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ melyre $\sum_{i \in I} s_i \leq b$ és $\sum_{i \in I} v_i \geq k$?

Lemma

HÁT \in NP

Vegyük azt a speciális esetet, amikor $s_i = v_i$ és $b = k \Rightarrow$

A Részhalmaz összeg probléma

RH

Bemenet: $(s_1, \dots, s_m; b)$

Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ melyre $\sum_{i \in I} s_i = b$?

Tétel

Az RH nyelv NP-teljes.

Bizonyítás.

RH \in NP ✓

Belátható, hogy SAT \prec RH

Speciális eset \implies **Partíció feladat:** ahol a $b = \frac{1}{2} \sum s_i$

PARTÍCIÓ

Bemenet: (s_1, \dots, s_m)

Kérdés: Van-e olyan $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ melyre
 $\sum_{i \in I} s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m s_i$?

A Partíció probléma

Tétel

A PARTÍCIÓ probléma NP-teljes.

Bizonyítás.

PARTÍCIÓ \in NP ✓

Belátjuk, hogy RH \prec PARTÍCIÓ (RH általánosabb!)

Vegyünk az RH egy $x = (s_1, \dots, s_m; b)$ inputját.

\implies Feltehető, hogy $b \leq s = \sum_{i=1}^m s_i$.

$f(x) = (s_1, \dots, s_m, s + 1 - b, b + 1)$.

A számok összege $2s + 2$, az utolsó két szám nem lehet egy partíció ugyanazon osztályában, mert az összegük túl nagy: $s + 2 > \frac{1}{2}(2s + 2)$.

RH-nak van megoldása \Leftrightarrow a megoldáshoz vegyünk hozzá $(s + 1 - b)$ -t

\Leftrightarrow PARTÍCIÓ-nak van megoldása □