Adatbázisok elmélete 12. előadás

Katona Gyula Y.
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi Tsz.
I. B. 137/b
kiskat@cs.bme.hu
http://www.cs.bme.hu/~kiskat

2005

Relációs sémák tervezése

Van elméleti alap $\Longrightarrow$ érv a relációs technika mellett
(Objektumosnak nincs ilyen.)

Kérdés:

- Mik a jó relációk?
- Milyen relációkat érdemes tárolni?
- Hogyan alakíthatunk tetszőleges relációkat jókká?

Cél: El akarunk kerülni kellemetlen jelenségeket, **anomáliákat:**

- *Módosítási anomália:* pl. ha a Termék(Termelő, Cím, Terméknév, Ár) reláció esetén egy termelő címe több sorban is előfordul, változáskor mindenhol át kell írni. Hiba esetén inkonzisztencia.
- *Beszúrási anomália:* Nem tudunk beszúrni adatot, ha az egyik attribútum hiányzik, mert nem ismerjük (és nem lehet NULL).
- *Törlési anomália:* Csak egész sorok törölhetők, így elveszhetnek hasznos adatok. Pl. ha egy termelő épp nem termel semmit, kitöröljük a címét is.

Relációs sémák tervezése

A relációk, tárolás jósága attól függ, hogy milyen megkötések vannak az adatokon.

Megszorítások két osztálya:

- *Értékfüggő:* Pl. ÁR$\geq$ $\mathbf{0}$, ÉLETKOR egész $\leq$ $\mathbf{1000}$, NÉV karaktersor, CÍM$\neq$NULL, (típusleírások)
- *Értékfüggetlen:* TERMÉKNÉV, TERMELŐ kulcs; $\forall$ TERMELŐ-nek egy címe van, egy TERMELŐ azonos nevű termékéből csak egy árú van

Utóbbi: az attribútumok mennyire függenek egymástól $\Longrightarrow$ **funkcionális függőség**

Funkcionális függőségek

Jelölés: $R(A_1, \ldots, A_n)$ reláció, X attribútum halmaz $\Longrightarrow X \subseteq R$
$X = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$ helyett $X = A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}$
Definíció. ***$Y \subseteq R$ funkcionálisan függ $X \subseteq R$-től***, *(jelölés: $X \to Y$), ha R bármely két sorára igaz, hogy ha ők megegyeznek X-en, akkor Y-on is megegyeznek.*

Pl. X =TERMELŐ, TERMÉKNÉV; Y=ÁR $\Longrightarrow X \to Y$

Megjegyzések:

- Azok az érdekes összefüggések, amik minden ilyen attribútumokkal rendelkező táblában fenn kell, hogy álljanak: axiómaszerű feltételek, az adatbázis bármely változása esetén is fennállnak $\Longrightarrow$ *érdemi függés*
  Azok, amik csak véletlenül, csak egy pillanatban állnak fenn $\Longrightarrow$ *eseti függés*
  (ezek nem érdekelnek, például lehetséges hogy egy adott pillanatban minden ár csak egyszer szerepel és ekkor úgy tűnik, mintha Ár$\to$ Termék érvényes függés lenne)
- Tehát az érdemi függések megadása modellezési kérdés: a séma megadásakor döntjük el, hogy milyen függéseket akarunk fenntartani mindenáron.
  Ezentúl a relációs sémának része lesz a függőségek halmaza F is $\Longrightarrow (R, F)$
  Vagyis megadjuk, hogy mik a séma attribútumai és mik az érdemi függései.

Funkcionális függőségek

R(TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM)

TERMELŐ, TERMÉKNÉV → TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM
TERMELŐ → CÍM

S(NÉV, CÍM, VÁROS, IRÁNYÍTÓSZ, TELEFON)

CÍM, VÁROS → IRÁNYÍTÓSZ
IRÁNYÍTÓSZ → VÁROS
NÉV, CÍM, VÁROS → TELEFON

- Egy adott reláció adott állapotából nem következik semmilyen érdemi függés. Viszont látszódhat olyan, hogy mi nem függhet mitől.
- $X \to Y$ teljesülhet úgy is, hogy az adott relációban nincs is két olyan sor, amik X-en megegyeznek.
- X-nek és Y-nak nem kell diszjunktaknak lenniük

A séma megadása csak a keretet jelenti, beleértve a függeseket is, ha ezt feltöltjük adatokkal, akkor kapunk egy a sémára illeszkedő relációt. A r reláció akkor illeszkedik az (R, F) sémára ha az attribútumai az R-ben adottak és teljesülnek benne az F függések.

Logikai következmény

Kérdés: ha adott egy F függéshalmaz és egy reláció, amiben F függései igazak, akkor milyen további függések lesznek még biztosan igazak?

Például: ha HALLGATÓ, TÁRGY → GYAKORLAT és GYAKORLAT → GYAKVEZ, akkor HALLGATÓ, TÁRGY → GYAKVEZ.

Azaz általánosabban: ha $XY \to Z$ és $Z \to W$, akkor attól függetlenül, hogy mi a reláció és X, Y, Z, W, igaz lesz, hogy $XY \to W$.
Definíció. *Adott (R, F). Az $X \to Y$ függés* ***logikai következménye*** *(szemantikai következménye) F-nek, ha az $X \to Y$ minden olyan r relációban teljesül, ahol F függései mind teljesülnek.*
Jelölése: $F \models X \to Y$

Azaz ez a fogalom azt adja meg, hogy mely függéseknek kell szükségszerűen teljesülniük minden olyan sémában/relációban, ahol F függései fennállnak.

Hogyan lehetne ezeket meghatározni, illetve eldönteni, hogy egy függés ilyen-e?

Logikai következmény

Felveszünk axiómákat, és azok segítségével próbáljuk levezetni. Persze ehhez az kell, hogy pontosan azokat lehessen levezetni F-ből, amik logikai következményei neki.
Levezethetőség jele: $F \vdash X \to Y$

Tehát bevezetünk axiómákat, levezethetőséget és belátjuk, hogy $\models \iff \vdash$.
(Pl. logikában így van.)

$\models \Rightarrow \vdash$: *Teljességi tétel*, ami igaz az levezethető.
$\vdash \Rightarrow \models$: *Igazság tétel*, csak igaz dolgok vezethetők le.

Definíció. *Egy $X \to Y$ függőség akkor vezethető le egy adott F függőséghalmazból, ha az axiómák ismételt alkalmazásával F-ből megkapjuk $X \to Y$-t. Jele: $F \vdash X \to Y$.*

Armstrong-axiómák

1. Reflexivitás: Ha $X, Y \subseteq R$ és $Y \subseteq X$, akkor $X \to Y$.
2. Kiegészítési tulajdonság: Ha $X, Y \subseteq R$ és $X \to Y$, akkor $XW \to YW$ igaz tetszőleges $W \subseteq R$-re.
3. Tranzitivitás: Ha $X, Y, Z \subseteq R$, $X \to Y$ és $Y \to Z$, akkor $X \to Z$.

Igazságtétel bizonyítása

Bizonyítás: **(Igazság tétel)**
Azt kell belátni, hogy ha egy függés (esetleg több lépésben) levezethető F-ből a három axióma segítségével, akkor ez a függés logikai következménye is F-nek, azaz minden olyan relációban, ahol F minden függése teljesül, ott teljesül a levezetett függés is. Ehhez elég azt belátni, hogy külön-külön, az egyes axiómák egyszeri használata ilyen függést ad.

1. Reflexivitás: Azt kell belátni, hogy minden r relációban, minden $Y \subseteq X \subseteq R$ attribútumhalmaz esetén $X \to Y$ igaz, azaz ha r bármely két adott sora megegyezik X-en, akkor megegyeznek Y-on is. De mivel $Y \subseteq X$, ezért nyilván megegyeznek Y-on, ha X-en megegyeztek. $\surd$
2. Kiegészítési tulajdonság: Az kell, hogy ha egy R-re illeszkedő r relációban $X \to Y$ igaz, akkor $XW \to YW$ is igaz lesz. Vegyünk két sort r-ben, ami megegyezik XW-n. Ekkor ezek megegyeznek X-en és W-n is, külön-külön. Mivel $X \to Y$, így megegyeznek Y-n is, tehát YW-n is. $\surd$
3. Tranzitivitás: Az kell, hogy ha egy R-re illeszkedő r relációban $X \to Y$ és $Y \to Z$ igaz, akkor $X \to Z$ is igaz lesz. Vegyünk két sort, ami megegyezik X-en. Mivel $X \to Y$, megegyeznek Y-n is. De mivel $Y \to Z$, megegyeznek Z-n is. $\surd$

Példa

Állítás. *Ha R(Város, Utca, Irányítószám) és $F = \{VU \to I, I \to V\}$, akkor $F \vdash IU \to VIU$ (és mivel $\vdash \Rightarrow \models$-t már láttuk, ezért $F \models IU \to VIU$).*
√

Bizonyítás:
i) $I \to V$: ez F-beli
ii) $IU \to VU$: kiegészítve U-val
iii) $IU \to IVU$: kiegészítve I-vel

Levezethető szabályok

Néhány további szabály, ami levezethető az axiómákból (és az igazságtétel miatt igazak is).

Állítás (Unió szabály). $\{X \to Y,\ X \to Z\} \vdash X \to YZ$

Bizonyítás:
i) $X \to Y$: ez F-beli
ii) $XZ \to YZ$: kiegészítve Z-val
iii) $X \to Z$: ez F-beli
iv) $X \to XZ$: kiegészítve X-vel
v) $X \to YZ$: iv) és ii) + tranzitivitás

Levezethető szabályok

Állítás (Áltranzitiv szabály). $\{X \to Y,\ YW \to Z\} \vdash XW \to Z$

Bizonyítás:
i) $X \to Y$: ez F-beli
ii) $XW \to YW$: kiegészítve W-val
iii) $YW \to Z$: ez F-beli
iv) $XW \to Z$: ii) és iii) + tranzitivitás

Állítás (Felbontási szabály). *Tegyük fel, hogy $Z \subseteq Y$, ekkor $\{X \to Y\} \vdash X \to Z$*

Bizonyítás:
i) $X \to Y$: ez F-beli
ii) $Y \to Z$: reflexivitás
iii) $X \to Z$: i) és ii) + tranzitivitás

Lezárás

Definíció. *Ha F egy függéshalamaz, akkor a **lezártja** F^+ az F-ből levezethető összes függés:*

$$F^+ = \{X \to Y \mid F \vdash X \to Y\}$$

Jó: mert ha majd belátjuk $\models \Longleftrightarrow \vdash$-t, akkor kiderül, hogy ez éppen az F-ből szükségszerűen következő összes függést adja meg.

Gond: nagyon nagy lehet
Pl. $R(A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots B_n)$ és $F = \{A_i \to B_j \mid 1 \le i, j \le n\}$, akkor ez n^2 db függés
F^+-ban benne van minden $A_{i_1} \ldots A_{i_k} \to B_{j_1} \ldots B_{j_l}$, azaz $(2^n - 1)(2^n - 1) \approx 2^{2n}$ eleme van.

Ezért ehelyett valami mást nézünk, amit könnyebb lesz meghatározni és jól közelíti F^+-t:

Definíció. *Ha X egy attribútum halmaz (R, F)-ben, akkor **lezártja***

$$X^+(F) = \{A \in R \mid F \vdash X \to A\},$$

azaz azon attribútumok, amik függnek X-től.

Attribútumhalmaz lezárása

Állítás. $X \subseteq X^+(F) \subseteq R$
Lemma. *(Fontos!!!)* $F \vdash X \to Y \iff Y \subseteq X^+(F)$

Bizonyítás: $\boxed{\Longrightarrow:}$ Tegyük fel, hogy $F \vdash X \to Y$ és legyen $A \in Y$.
$F \vdash X \to A$, hiszen vegyük $X \to Y$ levezetését és alkalmazzuk a felbontási szabályt a végén.
Definíció szerint ekkor $A \in X^+(F)$. Ez minden $A \in Y$-ra igaz. √

$\boxed{\Longleftarrow:}$ Legyen $Y = A_1 \dots A_k \subseteq X^+(F)$.
Így definíció szerint $\forall A_i \in Y$-ra $F \vdash X \to A_i$.
Ekkor $X \to Y$ levezetése: vesszük az A_i-k levezetését és a végén alkalmazzuk az uniós szabályt $k-1$-szer. √

Következménye: Ha minden X-re ismerjük/ki tudjuk számítani $X^+(F)$-et, akkor tetszőleges $X \to Y$ függésről eldönthető, hogy F^+-beli-e vagy sem, mert $X \to Y \in F^+$ pontosan akkor teljesül (definíció szerint), ha $F \vdash X \to Y$, de ez meg az előbbi lemma szerint pontosan akkor van, ha $Y \subseteq X^+(F)$

Megjegyzés: Majd látjuk, hogy $X^+(F)$ kiszámolására lesz gyors algoritmus.

Teljességi tétel

Tétel (Teljességi tétel). *Ha $F \models X \to Y$, akkor $F \vdash X \to Y$.*

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $X \to Y$ függés és F függéshalmaz, hogy $X \to Y$ nem vezethető le F-ből ($F \nvdash X \to Y$), noha logikai következménye neki ($F \models X \to Y$).

Ez utóbbi azt jelenti, hogy minden olyan relációban, amiben F függőségei teljesülnek, ha X-en megegyezik két sor, akkor azok megegyeznek Y-on is.

Úgy jutunk ellentmondásra, hogy konstruálunk egy olyan r relációt, ahol F függőségei teljesülnek, de $X \not\to Y$, ami ellentmond $F \models X \to Y$-nak.

Bizonyítás (folyt.)

r				$X^+(F)$									
							X						
	A_1	…	…				………………				…	…	A_n
t_1	1	1	1	1	1	1	1 ……………… 1	1	1	1	1	1	1
t_2	0	0	0	1	1	1	1 ……………… 1	1	1	1	0	0	0

Tehát r két soros reláció, $X^+(F)$-en megegyezik a két sor, a többin különbözik.
Állítás. *r-ben teljesülnek F függései.*
Bizonyítás: Legyen $U \to V \in F$.
Ha $U \nsubseteq X^+(F) \implies U \to V$ igaz, hiszen nincs olyan két sor, ami U-n megegyezik.

Ha $U \subseteq X^+(F)$, akkor lemma miatt $F \vdash X \to U$.
Tranzitivitás miatt $F \vdash X \to V$. Lemma $\implies V \subseteq X^+(F)$, V-n megegyezik a két sor. √
Állítás. *r-ben nem igaz $X \to Y$.*
Bizonyítás: Mivel $F \nvdash X \to Y$, ezért a fontos lemma miatt $Y \nsubseteq X^+(F)$, azaz Y kilóg $X^+(F)$-ből, abból a részből, ahol a két sor egyenlő.
Vagyis a két sor egyenlő X-en, de nem egyenlő Y-on, így $X \to Y$ nem igaz r-ben.

Tehát r tényleg olyan, hogy benne F minden függése fennáll, de $X \to Y$ nem, ami bizonyítja, hogy $F \not\models X \to Y$.

Következmény. *$\vdash$ és $\models$ felcserélhető.*

Kulcs

Definíció. *$X \subseteq R$ **szuperkulcsa** az (R, F) sémának, ha $F \vdash X \to R$. Másképpen, ha $R = X^+(F)$.*
*$X \subseteq R$ **kulcsa** az (R, F) sémának, ha szuperkulcs és nincs olyan valódi részhalmaza, ami szuperkulcs.*

Példa:
F = {TERMELŐ, TERMÉKNÉV → ÁR; TERMELŐ → CÍM}
X = TERMELŐ, TERMÉKNÉV
$\implies X^+(F)$ = TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM
TERMELŐ$^+(F)$ = TERMELŐ, CÍM
TERMÉKNÉV$^+(F)$ = TERMÉKNÉV
$\implies X$ kulcs

$X^+(F)$ kiszámítása

Algoritmus:

$X_0 = X$,

$\vdots$

$X_i = \ldots,$

$X_{i+1} = X_i \cup \{A \in R \mid$ van olyan $U \to V \in F$, hogy $U \subseteq X_i$ és $A \in V\}$,

$\vdots$

$X^+(F) = X_{\text{utolsó}}$, (amikor már nem nő)