Adatbázisok elmélete 12. előadás

Katona Gyula Y.
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi Tsz.
I. B. 137/b
kiskat@cs.bme.hu
http://www.cs.bme.hu/˜kiskat

2004

Emlékeztető

Definíció. *Adott (R, F). Az $X \to Y$ függés* ***logikai következménye*** *(szemantikai következménye) F-nek, ha az $X \to Y$ minden olyan r relációban teljesül, ahol F függései mind teljesülnek.*
Jelölése: $F \models X \to Y$

Definíció. *Egy $X \to Y$ függőség akkor vezethető le egy adott F függőséghalmazból, ha az axiómák ismételt alkalmazásával F-ből megkapjuk $X \to Y$-t. Jele: $F \vdash X \to Y$.*

$\models \Rightarrow \vdash$: *Teljességi tétel*, ami igaz az levezethető. (Ma lesz.)
$\vdash \Rightarrow \models$: *Igazság tétel*, csak igaz dolgok vezethetők le. √

Armstrong-axiómák

1. Reflexivitás: Ha $X, Y \subseteq R$ és $Y \subseteq X$, akkor $X \to Y$.
2. Kiegészítési tulajdonság: Ha $X, Y \subseteq R$ és $X \to Y$, akkor $XW \to YW$ igaz tetszőleges $W \subseteq R$-re.
3. Tranzitivitás: Ha $X, Y, Z \subseteq R$, $X \to Y$ és $Y \to Z$, akkor $X \to Z$.

Levezethető szabályok

Néhány további szabály, ami levezethető az axiómákból (és az igazságtétel miatt igazak is).

Állítás (Unió szabály). $\{X \to Y,\ X \to Z\} \vdash X \to YZ$

Bizonyítás:
i) $X \to Y$: ez F-beli
ii) $XZ \to YZ$: kiegészítve Z-val
iii) $X \to Z$: ez F-beli
iv) $X \to XZ$: kiegészítve X-vel
v) $X \to YZ$: iv) és ii) + tranzitivitás

Levezethető szabályok

Állítás (Áltranzitív szabály). $\{X \to Y,\ YW \to Z\} \vdash XW \to Z$

Bizonyítás:
i) $X \to Y$: ez F-beli
ii) $XW \to YW$: kiegészítve W-val
iii) $YW \to Z$: ez F-beli
iv) $XW \to Z$: ii) és iii) + tranzitivitás

Állítás (Felbontási szabály). *Tegyük fel, hogy $Z \subseteq Y$, ekkor $\{X \to Y\} \vdash X \to Z$*

Bizonyítás:
i) $X \to Y$: ez F-beli
ii) $Y \to Z$: reflexivitás
iii) $X \to Z$: i) és ii) + tranzitivitás

Lezárás

Definíció. *Ha F egy függéshalamaz, akkor a **lezártja** F^+ az F-ből levezethető összes függés:*

$$F^+ = \{X \to Y \mid F \vdash X \to Y\}$$

Jó: mert ha majd belátjuk $\models \iff \vdash$-t, akkor kiderül, hogy ez éppen az F-ből szükségszerűen következő összes függést adja meg.

Gond: nagyon nagy lehet
Pl. $R(A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots B_n)$ és $F = \{A_i \to B_j \mid 1 \le i, j \le n\}$, akkor ez n^2 db függés
F^+-ban benne van minden $A_{i_1} \ldots A_{i_k} \to B_{j_1} \ldots B_{j_l}$, azaz $(2^n - 1)(2^n - 1) \approx 2^{2n}$ eleme van.

Ezért ehelyett valami mást nézünk, amit könnyebb lesz meghatározni és jól közelíti F^+-t:

Definíció. *Ha X egy attribútum halmaz (R, F)-ben, akkor **lezártja***

$$X^+(F) = \{A \in R \mid F \vdash X \to A\},$$

azaz azon attribútumok, amik függnek X-től.

Attribútumhalmaz lezárása

Állítás. $X \subseteq X^+(F) \subseteq R$
Lemma. *(Fontos!!!)* $F \vdash X \to Y \iff Y \subseteq X^+(F)$

Bizonyítás: $\boxed{\Longrightarrow:}$ Tegyük fel, hogy $F \vdash X \to Y$ és legyen $A \in Y$.
$F \vdash X \to A$, hiszen vegyük $X \to Y$ levezetését és alkalmazzuk a felbontási szabályt a végén.
Definíció szerint ekkor $A \in X^+(F)$. Ez minden $A \in Y$-ra igaz. $\surd$

$\boxed{\Longleftarrow:}$ Legyen $Y = A_1 \ldots A_k \subseteq X^+(F)$.
Így definíció szerint $\forall A_i \in Y$-ra $F \vdash X \to A_i$.
Ekkor $X \to Y$ levezetése: vesszük az A_i-k levezetését és a végén alkalmazzuk az uniós szabályt $k - 1$-szer. $\surd$

Következménye: Ha minden X-re ismerjük/ki tudjuk számítani $X^+(F)$-et, akkor tetszőleges $X \to Y$ függésről eldönthető, hogy F^+-beli-e vagy sem, mert $X \to Y \in F^+$ pontosan akkor teljesül (definíció szerint), ha $F \vdash X \to Y$, de ez meg az előbbi lemma szerint pontosan akkor van, ha $Y \subseteq X^+(F)$

Megjegyzés: Majd látjuk, hogy $X^+(F)$ kiszámolására lesz gyors algoritmus.

Teljességi tétel

Tétel (Teljességi tétel). *Ha $F \models X \to Y$, akkor $F \vdash X \to Y$.*

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $X \to Y$ függés és F függéshalmaz, hogy $X \to Y$ nem vezethető le F-ből ($F \nvdash X \to Y$), noha logikai következménye neki ($F \models X \to Y$).

Ez utóbbi azt jelenti, hogy minden olyan relációban, amiben F függőségei teljesülnek, ha X-en megegyezik két sor, akkor azok megegyeznek Y-on is.

Úgy jutunk ellentmondásra, hogy konstruálunk egy olyan r relációt, ahol F függőségei teljesülnek, de $X \not\to Y$, ami ellentmond $F \models X \to Y$-nak.

Bizonyítás (folyt.)

$\boxed{r}$				$X^+(F)$									
							X						
	A_1	…	…				....				…	…	A_n
t_1	1	1	1	1	1	1	1 1	1	1	1	1	1	1
t_2	0	0	0	1	1	1	1 1	1	1	1	0	0	0

Tehát r két soros reláció, $X^+(F)$-en megegyezik a két sor, a többin különbözik.
Állítás. *r-ben teljesülnek F függései.*
Bizonyítás: Legyen $U \to V \in F$.
Ha $U \not\subseteq X^+(F) \implies U \to V$ igaz, hiszen nincs olyan két sor, ami U-n megegyezik.

Ha $U \subseteq X^+(F)$, akkor lemma miatt $F \vdash X \to U$.
Tranzitivitás miatt $F \vdash X \to V$. Lemma $\implies V \subseteq X^+(F)$, V-n megegyezik a két sor. $\surd$

Állítás. *r-ben nem igaz $X \to Y$.*
Bizonyítás: Mivel $F \nvdash X \to Y$, ezért a fontos lemma miatt $Y \not\subseteq X^+(F)$, azaz Y kilóg $X^+(F)$-ből, abból a részből, ahol a két sor egyenlő.
Vagyis a két sor egyenlő X-en, de nem egyenlő Y-on, így $X \to Y$ nem igaz r-ben.

Tehát r tényleg olyan, hogy benne F minden függése fennáll, de $X \to Y$ nem, ami bizonyítja, hogy $F \not\models X \to Y$.

Következmény. *$\vdash$ és $\models$ felcserélhető.*

Kulcs

Definíció. $X \subseteq R$ ***szuperkulcsa*** *az* (R, F) *sémának, ha* $F \vdash X \to R$*. Másképpen, ha* $R = X^+(F)$.
$X \subseteq R$ ***kulcsa*** *az* (R, F) *sémának, ha szuperkulcs és nincs olyan valódi részhalmaza, ami szuperkulcs.*

Példa:
F = {TERMELŐ, TERMÉKNÉV → ÁR; TERMELŐ → CÍM}
X = TERMELŐ, TERMÉKNÉV
$\Longrightarrow$ $X^+(F)$ = TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM
TERMELŐ$^+(F)$ = TERMELŐ, CÍM
TERMÉKNÉV$^+(F)$ = TERMÉKNÉV
$\Longrightarrow$ X kulcs

$X^+(F)$ kiszámítása

Algoritmus:
$X_0 = X$,
$\vdots$
$X_i = \dots,$
$X_{i+1} = X_i \cup \{A \in R \mid$ van olyan $U \to V \in F$, hogy $U \subseteq X_i$ és $A \in V\}$,
$\vdots$
$X^+(F) = X_{\text{utolsó}}$, (amikor már nem nő)

Állítás. $X_{utolsó} \subseteq X^+(F)$ *(azaz, a fontos lemma miatt* $F \vdash X \to X_{utolsó}$*)*

Bizonyítás: Indukcióval i-re belátjuk, hogy $F \vdash X \to X_i$, innen már következik az állítás.

Bizonyítás (folyt.)

$i = 0$: $F \vdash X \to X_0 = X$, reflexivitás.

$i \rightsquigarrow i + 1$

1. $U \to V \in F,\ U \subseteq X_i,\ A \in V$
2. $X_i \to U$, reflexivitás
3. $X \to U$, tranzitivitás + indukciós felt. $F \vdash X \to X_i$ + (2. sor)
4. $X \to V$, tranzitivitás (1. és 3. sor)
5. $V \to A$, reflexivitás, (1. sor)
6. $X \to A$, tranzitivitás, (4. és 5. sor)
7. $F \vdash X \to A$, minden $A \in X_{i+1}$
8. $F \vdash X \to X_{i+1}$

$\Longrightarrow F \vdash X \to X_{\text{utolsó}} \Longrightarrow$ (Lemma) $X_{\text{utolsó}} \subseteq X^+(F)$. $\surd$

Példa:
$R(A, B, C, D)$, $F = \{A \to B,\ B \to C,\ BC \to D\}$, $A^+(F) = ?$
$X_0 = \{A\}$, $X_1 = \{A, B\}$, $X_2 = \{A, B, C\}$, $X_3 = \{A, B, C, D\} = X_{\text{utolsó}}$

Bizonyítás másik iránya

Állítás. $X^+(F) \subseteq X_{utolsó}$

Bizonyítás: Tekintsük az alábbi kétsoros r relációt: a két sor $X_{\text{utolsó}}$-n egyenlő, azon kívül eltérnek.

r							$\overbrace{\qquad\qquad}^{X_{\text{utolsó}}}$						
	A_1	…	…				$\overbrace{\qquad}^{X}$				…	…	A_n
t_1	1	1	1	1	1	1	1……………1	1	1	1	1	1	1
t_2	0	0	0	1	1	1	1……………1	1	1	1	0	0	0

r-ben egyrészt minden F-beli függés teljesül. (Bizonyítás, hasonlóan, mint a teljességi tételnél csak most az kell, hogy ha egy $W \to S$ függés esetén $W \subseteq X_{\text{utolsó}}$, akkor $S \subseteq X_{\text{utolsó}}$ is igaz, az algoritmus működése miatt.)
r segítségével azt látjuk be, hogy ha $A \notin X_{\text{utolsó}}$, akkor $A \notin X^+(F)$, ami éppen a kívánt állítás.

Ha $A \notin X_{\text{utolsó}} \Longrightarrow r$ olyan reláció, amiben $X \nrightarrow A$
ezért $F \nvDash X \to A$, hiszen r-ben F minden függése teljesül.
$\Longrightarrow$ (az igazság tétel miatt) $F \nvdash X \to A \Longrightarrow$ (fontos lemma) $A \notin X^+(F)$ $\surd$

Következmények

Következmény. *$X^+(F) = X_{utolsó}$, azaz tényleg jó az algoritmus.*

Következmény. *Adott X-ről el lehet dönteni, hogy (szuper)kulcs-e.*

Megnézzük, hogy $X^+(F) = R$ igaz-e. Ha igen, akkor szuperkulcs. Ha minden $X - A$-ra már nem szuperkulcsot kapunk, akkor X kulcs.
Gyorsan implementálható.

Felbontások

Cél: *Adott (R, F) sémából anomáliát nem tartalmazó olyan felbontás előállítása, amiből ugyanaz az információ nyerhető, mint az eredetiből.*
Definíció. *$\rho = (R_1, \ldots, R_k)$ az (R, F) séma felbontása, ha $R_i \subseteq R$ és $\cup_{i=1}^k R_i = R$.*
Ha r egy (R, F) sémára illeszkedő reláció, akkor legyen $r_i = \pi_{R_i}(r)$ és

$$m_\rho(r) := r_1 \bowtie r_2 \bowtie \cdots \bowtie r_k$$

(Megj.: $\bowtie$ asszociatív, így nem kell a zárójelezéssel vesződni)

Kérdés: mikor nyerhető vissza az infó a felbontásból? Mi általában r és $m_\rho(r)$ viszonya?
Tétel.

(i) $r \subseteq m_\rho(r)$
(ii) $r_i = \pi_{R_i}(m_\rho(r))$
(iii) $m_\rho\left(m_\rho(r)\right) = m_\rho(r)$

Bizonyítás

Bizonyítás: Ha t egy sor, akkor $\pi_{R_i}(t)$ helyett $t[R_i]$-t írunk.

(i) $r \subseteq m_\rho(r)$:
Ha t egy sor r-ben, akkor t minden vetülete benne van a megfelelő $t[R_i]$-ben, ezek össze is illenek, így $m_\rho(r)$-ben is szerepelni fog t.

(ii) $r_i = \pi_{R_i}(m_\rho(r))$:
$r \subseteq m_\rho(r) \implies r_i = \pi_{R_i}(r) \subseteq \pi_{R_i}\left(m_\rho(r)\right)$.
Ha $t \in m_\rho(r)$, akkor ez természetes illesztéssel jött létre, r_i-beli sorokból, így levetítve R_i-re épp r_i egy sorát kapjuk.

(iii) $m_\rho\left(m_\rho(r)\right) = m_\rho(r)$:
$m_\rho(r) = \bowtie_{i=1}^k r_i = \bowtie_{i=1}^k \pi_{R_i}(r)$
$m_\rho\left(m_\rho(r)\right) = \bowtie_{i=1}^k \pi_{R_i}\left(m_\rho(r)\right) \overset{(ii)}{=} \bowtie_{i=1}^k r_i = m_\rho(r)$

Megjegyzés: (i) szerint a szétszedés és összerakás után vagy pont r-t kapom meg, vagy többet kapok, kevesebb sor nem lehet. Ha $r \neq m_\rho(r)$, akkor ez nem egy túl hasznos felbontás.
De ennél több is igaz: ebben az esetben teljesen reménytelen a felbontásból visszaszerezni r-t: mivel (ii) szerint r és $m_\rho(r)$ (függőleges) vetületei ugyanazok, ezért ha $r \neq m_\rho(r)$, akkor *van két olyan reláció (r és $m_\rho(r)$), aminek a vetületei ugyanazok $\implies$ a vetületekből nem lehet visszaállítani r-et (nem lehet eldönteni, hogy r vagy $m_\rho(r)$ volt).*

Következmény: ha $r \neq m_\rho(r)$, akkor sehogyan se lehet visszahozni r-t a vetületekből.

Hűséges felbontás

Tehát az a kérdés, hogy mik azok a felbontásai egy (R, F) sémának, amik esetén tetszőleges (R, F)-re illeszkedő r relációra $r = m_\rho(r)$
Definíció. *Adott (R, F). Ennek ρ felbontása* ***hűséges (veszteségmentes, lossless)****, ha minden (R, F)-re illeszkedő r relációra $r = m_\rho(r)$.*

Példa: Legyen (R, F) a következő: $R(A, B, C)$, $F = \{C \to A\}$ és legyen r az alábbi reláció.

r	A	B	C
	a	c	e
	a	d	f
	b	c	g
	b	d	h

s	A	B
	a	c
	a	d
	b	c
	b	d

t	B	C
	c	e
	d	f
	c	g
	d	h

$s \bowtie t$	A	B	C
	a	c	e
	a	c	g
	a	d	f
	a	d	h
	b	c	e
	b	c	g
	b	d	f
	b	d	h

Ez a példa mutatja, hogy $r \neq s(A, B) \bowtie t(B, C)$, azaz ez a felbontás nem hűséges.

De $r = s'(A, C) \bowtie t'(B, C)$, majd látjuk.